нены легким жестким стержнем. В положении равновесия нити вертикальны. Определите период малых колебаний системы в плоскости рисунка.

Р.Компанеец

Ф1802. Фотографию Буратино – вид спереди, расстояние до аппарата 1 м – делают при помощи простого фотоаппарата с фокусным расстоянием объектива 5 см. На фотографии глаза оказались точно «в фокусе», а вот кончик носа получился размытым. До какого диаметра нужно задиафрагмировать объектив, чтобы сделать четкой всю фотографию? У Буратино нос «морковкой», он перпендикулярен плоскости лица и имеет длину 30 см. На упаковке пленки загадочная надпись: «400 линий на миллиметр».

Р.Александров

Решения задач М1766–М1770, Ф1778–Ф1787

М1766. *На бесконечной шахматной доске находятся ферзь и невидимый король, которому запрещено ходить по диагонали. Они ходят по очереди. Может ли ферзь ходить так, чтобы король рано или поздно наверняка попал под шах?*

Ответ: может. Вот один из способов движения ферзя – делать все ходы на одну клетку по диагонали, двигаясь при этом по такой разворачивающейся спирали: 1 ход вправо-вверх, затем 10 ходов вправо-вниз, 100 ходов влево-вниз, 1000 ходов влево-вверх, 10000 ходов вправо-вверх и т.д. Докажем, что где бы ни был король вначале, рано или поздно ферзь окажется с ним на одной горизонтали или вертикали. Введем прямоугольную систему координат с единицей, равной стороне клетки. Расположим оси так, чтобы все центры клеток имели целые координаты (координаты центра будем называть координатами клетки), ферзь стоял в начале координат, а король оказался в некоторой точке (x, y) с обеими положительными координатами.

Заметим, что каждым ходом каждая из координат фигур меняется не более чем на 1. Обе координаты ферзя вначале меньше соответствующих координат короля. Если в какой-то момент хотя бы одна из координат ферзя станет больше, чем у короля, то (по принципу дискретной непрерывности) эти координаты в какой-то промежуточный момент были равны, т.е. король и ферзь стояли на одной горизонтали или вертикали, и король был под шахом.

Скажем, что ферзь сделал ход в правильном направлении, если обе его координаты увеличились. (Из каждых четырех серий ходов подряд ферзь одну серию делает в правильном направлении, сам того не подозревая.) Оценим координаты ферзя и короля после того, как ферзь сделает серию из 10^k ходов в правильном направлении, где $10^k > 5(x+y)$. Всего к этому моменту ферзь сделает $n = 10^k + \underbrace{11\ldots11}_{k}$ ходов, и так как $\underbrace{11\ldots11}_{k} < 0{,}2\cdot 10^k$, то $n < 1{,}2\cdot 10^k$. Даже если все ходы до этой серии уменьшали его координаты, все равно обе координаты будут больше $(1-0{,}2)\cdot 10^k = 0{,}8\cdot 10^k$. Сумма координат короля вначале была $x + y < 0{,}2\cdot 10^k$. Каждым ходом король меняет эту сумму ровно на 1 (ходов по диагонали нет!). За n ходов сумма его координат увеличилась не более чем на n, поэтому она не превосходит $1{,}4\cdot 10^k$. Следовательно, меньшая из координат не превосходит $0{,}7\cdot 10^k$, т.е. меньше, чем у ферзя. А из этого уже следует утверждение задачи.

Так как король невидим для ферзя, то игра остановится по знаку судьи, когда он увидит, что шах произошел.

А.Шаповалов

М1767. *Внутри квадрата ABCD расположены точки P и Q так, что $\angle PAQ = \angle PCQ = 45°$. Докажите, что $PQ^2 = BP^2 + QD^2$ (рис.1).*

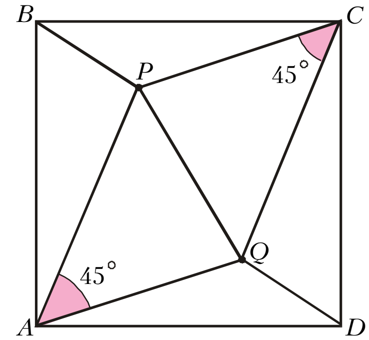

Рис.1

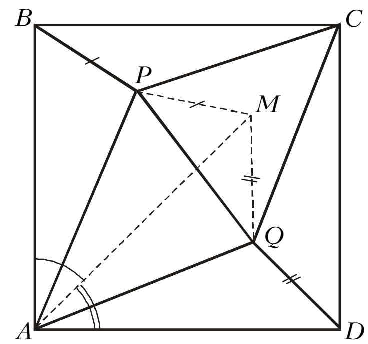

Рис.2

Симметрично отразим ΔAPB относительно прямой AP, а ΔAQD – относительно прямой AQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку M (рис.2). Затем симметрично отразим ΔCPB относительно прямой CP, а треугольник CQD – относительно прямой CQ. При этом отраженные точки B и D «склеятся» в одну точку N.

Заметим, что $\angle PMQ + \angle QNP = 180^\circ$, но так как треугольники PMQ и QNP равны, то $\angle PMQ = \angle QNP$, т.е. $\angle PMQ = 90^\circ$.

Значит, треугольник PMQ прямоугольный и $PM^2 + QM^2 = PQ^2$. Но $PM = BP$, а $QM = QD$, поэтому окончательно можно утверждать, что $PB^2 + QD^2 = PQ^2$.

В.Произволов

М1768. *а) Расположите числа 1, 2, 3, …, 100 в строку в таком порядке, чтобы для любых нескольких (но не всех) из этих чисел сумма номеров занятых ими мест не совпадала с суммой самих этих чисел.*

б) При посадке в аэробус пассажиры сели кто куда захотел. В итоге все места оказались заняты, а для любой группы, в которой не более ста пассажиров, среднее арифметическое номеров занимаемых ими мест более чем на единицу отличается от среднего арифметического номеров мест, указанных в их билетах. Каково наименьшее возможное число мест в этом аэробусе?*

а) Укажем два способа: 100, 1, 2, …, 97, 98, 99 и 2, 3, 4, …, 99, 100, 1. Каждый из них дает требуемое расположение чисел, в чем легко непосредственно убедиться.

б) **Ответ**: 301 место.

Каждый пассажир включен в один из циклов вида $P_1P_2\ldots P_m$, где $P_1, P_2, \ldots, P_m$ – некоторые пассажиры, причем P_i-й пассажир (i = 1, 2, …, m – 1) имеет билет на место, которое занимает P_{i+1}-й пассажир, а P_m-й пассажир – на место, которое занимает P_1-й пассажир. Если в таком цикле 100 пассажиров или менее, то все они могли составить одну рассматриваемую группу, для которой