Параллельная проекция

А.ЗАСЛАВСКИЙ

При решении стереометрических задач часто приходится изображать пространственные объекты на плоскости. Как правило, для этого используется параллельная проекция, при которой каждая точка X исходного объекта изображается точкой X' пересечения плоскости чертежа и прямой, проходящей через X и параллельной некоторой фиксированной прямой в пространстве. Важным частным случаем является ортогональная проекция, при которой направление проектирования перпендикулярно плоскости чертежа. Наша цель — выяснить, какие свойства исходных объектов сохраняются при проекции, а какие могут нарушаться.

Проекции плоских объектов

Начнем с самых простых объектов — прямых и отрезков. Из рисунка 1 видно, что параллельная проекция переводит параллельные прямые в параллельные. Кроме того, с помощью теоремы Фалеса нетрудно показать, что сохраняются отношения длин параллельных отрезков.

Упражнения

1. Докажите эти утверждения.

2. Докажите, что при параллельной проекции расположенные в одной плоскости равновеликие параллелограммы переходят в равновеликие.

Указание. Рассмотрите случай двух

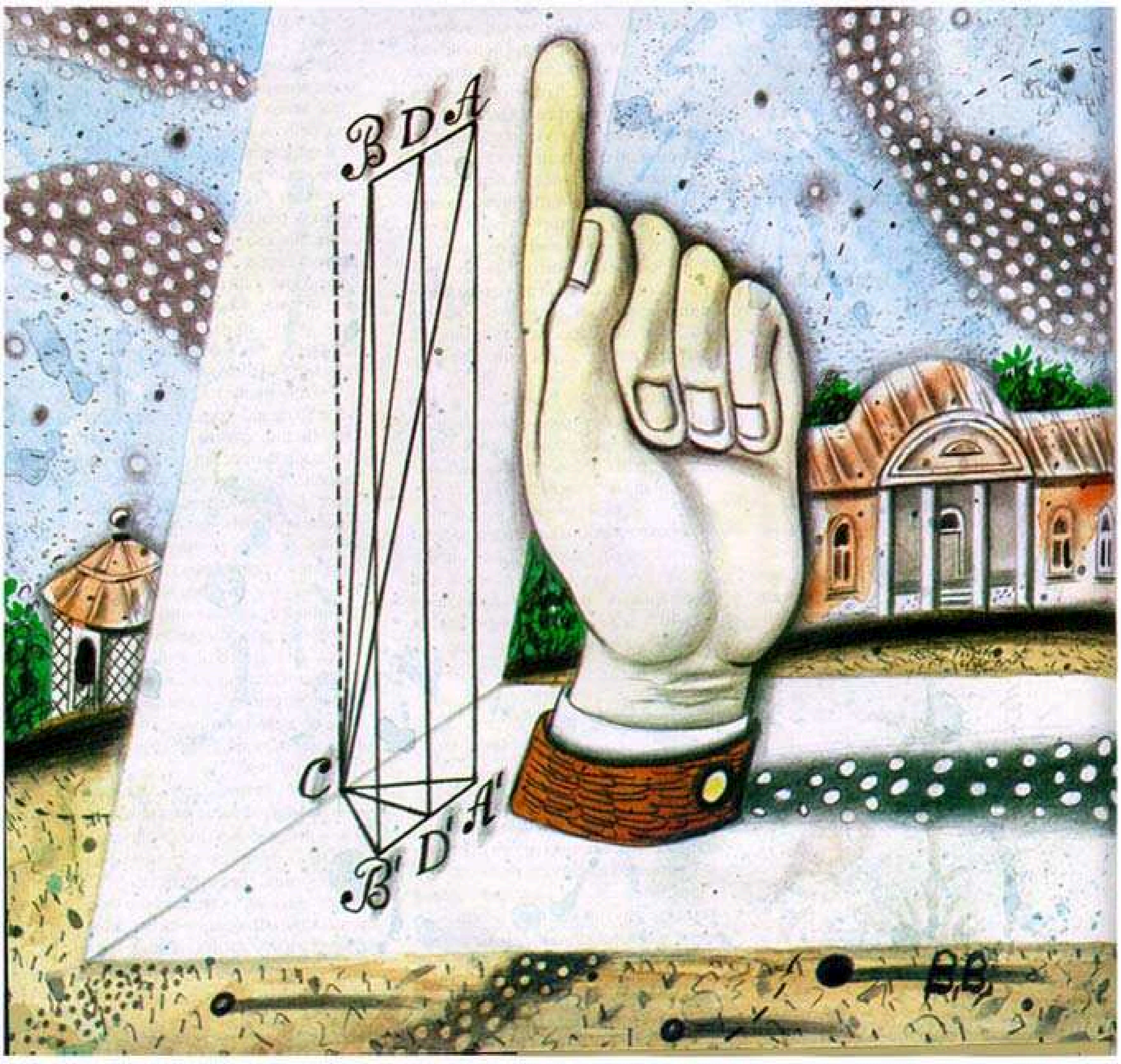

Иллюстрация В.Власова

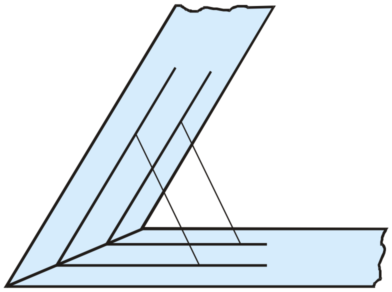

Рис.1

параллелограммов, изображенных на рисунке 2, и подумайте, как свести произвольный случай к разобранному.

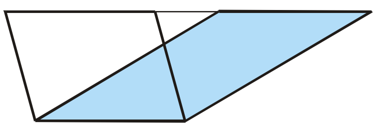

Рис.2

Пользуясь результатом упражнения 2, можно показать, что параллельная проекция сохраняет отношения площадей фигур, лежащих в одной плоскости. Для ортогональной проекции верен более сильный результат: отношение площади проекции к площади исходной фигуры равно косинусу угла между содержащими их плоскостями.

Следующей простейшей фигурой является угол. Оказывается, что даже при ортогональной проекции величина угла может подвергнуться весьма сильным искажениям. Так, из рисунка 3 видно, что если плоскость, в которой расположен угол, и плоскость проекции почти перпендикулярны, а перпендикуляр (CD) к линии их пересечения лежит внутри угла, то «очень острый» угол (ACB) может перейти в «очень тупой» $(A'CB')$.

Упражнение 3. Проведите вычисления, подтверждающие это утверждение.

В дальнейшем нам будет полезен следующий факт. Пусть плоские углы некоторого трехгранного угла равны a, b, c, а противолежащие им двугранные углы равны, соответственно, α, β, γ. Тогда

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma . \qquad (*)$$

Упражнение 4. Докажите эту формулу.

От угла естественно перейти к треугольнику. Пусть дан некоторый треугольник ABC. Выясним, как могут выглядеть треугольники, являющиеся его ортогональными проекциями. Результат оказывается довольно неожиданным.

Утверждение 1. *Любой треугольник может быть получен как ортогональная проекция треугольника, подобного ABC.*

Доказательство. Разберем случай, когда ΔABC правильный. Доказательство для общего случая аналогично.

Проведем через вершины данного треугольника $A'B'C'$ прямые a, b, c, перпендикулярные его плоскости (рис.4). Для доказательства утверждения достаточно найти на прямых a и b такие точки X и Y, что $C'X = C'Y$ и $\angle XC'Y = \pi/3$. Предположим для определенности, что $C'A' \geq C'B'$, и возьмем точку X, совпадающую с A', и точку Y, лежащую на прямой b выше плоскости $A'B'C'$, такую что $C'Y = C'A'$. Если $\angle A'C'Y > \pi/3$, будем двигать точки X и Y по соответствующим прямым вверх, соблюдая условие $C'X = C'Y$. Подняв обе точки достаточно высоко, можно сделать угол $XC'Y$ сколь угодно малым, а так как этот угол меняется непрерывно, в какой-то момент он примет требуемое значение. Если же $\angle A'C'Y < \pi/3$, будем двигать точку X вниз, а Y вверх. Тогда угол $XC'Y$ стремится к π и также в какой-то момент принимает требуемое значение. Положив теперь $X = A$, $Y = B$, $C' = C$, получаем, что треугольник $A'B'C'$ является проекцией правильного треугольника ABC.

Отметим, что утверждение 1 означает фактически, что для плоских фигур любое изображение, полученное посредством параллельной проекции, можно с точностью до подобия получить с помощью ортогональной.

Действительно, пусть проекциями трех не лежащих на одной прямой точек A, B, C являются точки A', B', C'. Проведем через произвольную точку D плоскости ABC прямые, параллельные AC и BC, и найдем точки X и Y их пересечения с BC и AC соответственно (рис.5). По свойствам параллельной проекции X и Y проектируются в такие точки X' и Y', что $C'X'/B'X' = CX/BX$, $C'Y'/A'Y' = CY/AY$, а точка D – в точку D' пересечения прямых, проходящих через X' и Y' и параллельных $C'A'$ и $C'B'$ соответственно. Таким образом, проекции всех точек плоскости ABC определяются однозначно. С другой стороны, утверждение 1 показывает, что три данные точки можно ортогонально спроектировать в вершины треугольника, подобного данному.

Однако при переходе к пространственным объектам возможности ортогональной и параллельной проекций оказываются существенно различными. Чтобы показать это, исследуем вопросы, связанные с изображением на плоскости одного из самых простых таких объектов — тетраэдра.

Проекции тетраэдра

Как правило, тетраэдр изображают на плоскости в виде четырехугольника, диагонали которого соответствуют двум противоположным ребрам тетраэдра, а стороны – остальным ребрам. Возникает естественный вопрос: какими свойства-

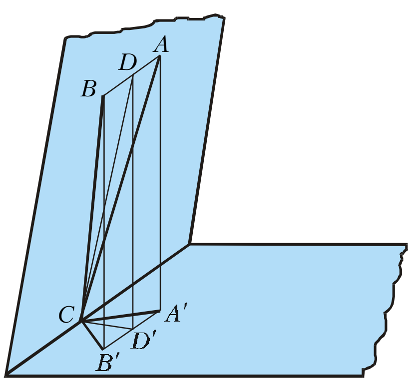

Рис.3

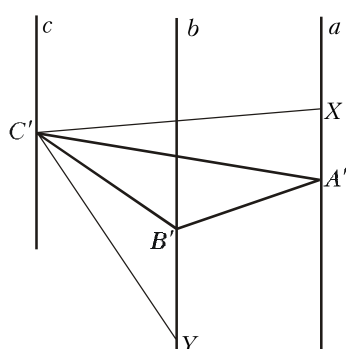

Рис.4

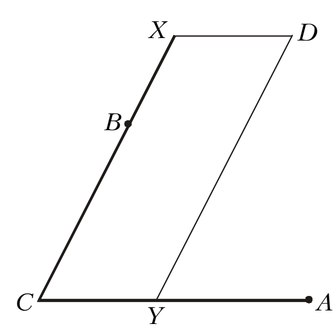

Рис. 5

ми должен обладать этот четырехугольник, если известны какие-то свойства тетраэдра, например если тетраэдр правильный?

Оказывается, что, рисуя четырехугольник, не нужно заботиться о соблюдении каких-либо условий. Точнее, справедливо следующее.

Теорема Польке–Шварца. *Любой четырехугольник на плоскости может быть получен как параллельная проекция правильного тетраэдра.*

Доказательство. Четырехугольник с точностью до подобия определяется четырьмя параметрами: отношением диагоналей, углом между диагоналями и отношениями отрезков, на которые диагонали делятся точкой их пересечения. Пусть дан четырехугольник $A'B'C'D'$, диагонали которого пересекаются в точке O. На ребрах AC и BD правильного тетраэдра $ABCD$ возьмем точки O_1 и O_2, такие что $AO_1/O_1C = A'O/OC'$ и $BO_2/O_2D = B'O/OD'$. Если проектировать тетраэдр на любую плоскость параллельно прямой O_1O_2, то диагонали полученного четырехугольника будут делиться точкой пересечения в тех же отношениях, что и диагонали данного. Осталось показать, что за счет выбора плоскости проекции можно получить нужные значения двух оставшихся параметров. Поскольку противоположные ребра тетраэдра равны и перпендикулярны, это утверждение можно переформулировать так:

Дан прямоугольный равнобедренный треугольник PXY ($\angle P = 90°$) и проходящие через его вершины X и Y параллельные прямые, не лежащие в его плоскости. Тогда на этих прямых найдутся такие точки X', Y', что отношение PX'/PY' и угол $X'PY'$ равны наперед заданным величинам.

Этот факт можно доказать теми же рассуждениями, что и утверждение 1. Однако мы используем для доказательства формулу (∗). Проведем через P прямую l, параллельную данным прямым, проходящим через X и Y. Пусть угол между плоскостями φ и ψ, первая из которых содержит прямые l и PX, вторая l и PY, равен γ, а углы, которые l образует с PX и PY, равны x и y соответственно. Проведем через P две прямые, лежащие в плоскостях φ и ψ и образующие с l углы a и b. Точки их пересечения с параллельными l прямыми, проходящими через X и Y, обозначим X', Y' (рис.6). Тогда (по теореме синусов)

$$PX'/PX = \sin x/\sin a,$$

$$PY'/PY = \sin y/\sin b,$$

и

$$PX'/PY' = \sin x/\sin y \cdot \sin b/\sin a.$$

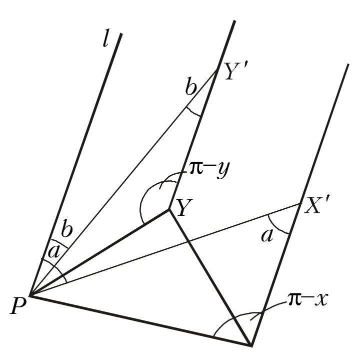

Рис.6

Таким образом, отношение PX'/PY' определяется отношением синусов углов a и b, и можно сделать эти синусы сколь угодно малыми, оставляя их отношение постоянным. При этом знаки их косинусов могут быть как одинаковыми, так и противоположными. Пусть $\angle X'PY' = c$. Из формулы (∗), примененной к трехгранному углу с ребрами l, PY', PX', следует, что при малых значениях $\sin a$, $\sin b$ значение $\cos\angle X'PY'$ близко к 1 при одинаковых знаках $\cos a$, $\cos b$ и к -1 при противоположных. Поэтому при некоторых a, b это значение равно заданному.

Теорема доказана.

Из рисунка 7 видно, что вершины правильного тетраэдра $ABCD$ и точки A', B', C', D', симметричные им относительно его центра тяжести (совпадающего с точкой пересечения высот), являются вершинами куба, а противоположные грани этого куба проходят через противоположные точки тетраэдра. Поскольку центр тяжести тетраэдра является серединой отрезка, соединяющего середины его двух противоположных ребер, а параллельное проектирование сохраняет середины отрезков, центр тяжести тетраэдра проецируется в центр тяжести его проекции. Отсюда следует, что вершины двух произвольных четырехугольников, симметричных относительно общего центра тяжести, можно считать параллельными проекциями вершин куба.

Рассмотрим теперь не просто параллельное, а ортогональное проектирование правильного тетраэдра на плоскость. В этом случае уже нельзя получить произвольный четырехугольник. Действительно, отношения, в которых диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения, однозначно определяют направление проектирования, а значит, и его плоскость и остальные параметры четырехугольника.

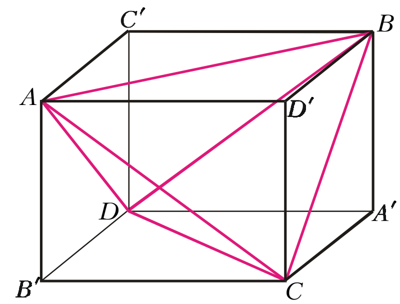

Рис.7

Упражнение 5. Докажите, что если диагонали четырехугольника, являющегося ортогональной проекцией правильного тетраэдра, перпендикулярны, то одна из них делится точкой пересечения пополам.

Указание. Докажите, что если прямой угол при ортогональной проекции переходит в прямой, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Вывести условия, которым должен удовлетворять четырехугольник, являющийся ортогональной проекцией правильного тетраэдра, несложно, но они оказываются довольно громоздкими и малоинтересными. Однако эти условия неожиданно красиво записываются с помощью комплексных чисел.

Ортогональное проектирование и комплексные числа

Пусть четырехугольник $ABCD$ является ортогональной проекцией на плоскость правильного тетраэдра. Найдем координаты векторов, соответствующих его сторонам и диагоналям в произвольной декартовой системе координат, и сопоставим каждому такому вектору (x, y) комплексное число $x + iy$. Оказывается, сумма квадратов полученных шести чисел равна нулю. Отметим, что направления векторов можно выбирать произвольно, так как $(-z)^2 = z^2$ для любого комплексного числа z.

Справедливо и обратное: если сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих сторонам и диагоналям данного четырехугольника, равна нулю, то этот четырехугольник может быть получен ортогональным проектированием правильного тетраэдра.

Вновь впишем тетраэдр в куб, как на рисунке 7. Пусть $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – векторы, лежащие на трех выходящих из одной вершины ребрах куба, w_1, w_2, w_3 — комплексные числа, соответствующие проекциям этих векторов. Тогда из двух противоположных ребер тетраэдра, лежащих, например, в гранях куба, образованных векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, одно задает вектор $\vec{e}_1+\vec{e}_2$, другое $\vec{e}_1-\vec{e}_2$. При переходе к проекциям эти соотношения сохраняют силу, и, значит, сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих этим ребрам, равна

$$(w_1+w_2)^2+(w_1-w_2)^2=2\left(w_1^2+w_2^2\right),$$

а сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих всем ребрам тетраэдра, равна $4\left(w_1^2+w_2^2+w_3^2\right)$. Поэтому наше утверждение равносильно следующему:

Утверждение 2. *Три вектора на плоскости могут быть получены как ортогональные проекции трех непараллельных ребер куба тогда и только тогда, когда сумма квадратов соответствующих им комплексных чисел равна нулю.*

Доказательство. Докажем сначала лемму.

Лемма. Пусть *данные векторы плоскости имеют координаты* (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). *Для того чтобы они были проекциями трех ребер куба, необходимо и достаточно, чтобы существовали три числа* z_1, z_2, z_3, *удовлетворяющие условиям*

$$x_1^2+y_1^2+z_1^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2=$$
$$=x_3^2+y_3^2+z_3^2, \quad (1)$$

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=x_1x_3+y_1y_3+$$
$$+z_1z_3=x_2x_3+y_2y_3+z_2z_3=0. \quad (2)$$

Для доказательства леммы будем считать, что одна из вершин куба совпадает с началом координат плоскости проекции, а смежные с ней проектируются в точки с координатами (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Введем в пространстве систему координат, оси x и y которой совпадают с координатными осями плоскости проекции, а ось z перпендикулярна этой плоскости. Тогда три смежные с началом координат вершины куба будут иметь координаты (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) при некоторых z_1, z_2, z_3. Для того чтобы три вектора с такими координатами были ребрами куба, необходимо и достаточно, чтобы их длины были равны и они были попарно перпендикулярны. Первое условие равносильно соотношениям (1), второе — соотношениям (2).

Исключим теперь из условий (1), (2) z_1, z_2, z_3. Для этого перенесем в (2) произведения z_iz_j в правую часть и разделим произведение двух из получившихся уравнений на третье. Получим, например, что

$$z_1^2=-(x_1x_2+$$
$$+y_1y_2)(x_1x_3+y_1y_3)/(x_2x_3+y_2y_3).$$

Если, например, $x_2x_3+y_2y_3=0$, то векторы $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ перпендикулярны, и один из них является ребром куба (см. упражнение 5). Разбор этого случая не представляет трудности. Подставив выражение для z_1^2 и аналогичные выражения для z_2^2, z_3^2 в (1), получим два соотношения, которым должны удовлетворять исходные координаты. После преобразований эти соотношения принимают вид

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=y_1^2+y_2^2+y_3^2,$$
$$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=0.$$

Следовательно,

$$(x_1+iy_1)^2+(x_2+iy_2)^2+(x_3+iy_3)^2=$$
$$=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)+$$
$$+i(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=0.$$

Утверждение доказано.

Проекции правильных многогранников

Из утверждения 2 следует, что для тетраэдра и куба сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих проекциям ребер, равна нулю. Докажем, что для остальных правильных многогранников это также справедливо. Прежде всего, отметим, что октаэдр можно получить, отрезав от тетраэдра с ребром 2 четыре тетраэдра с ребром 1 (рис.8). Ребра полученного октаэдра будут параллельны ребрам исходного тет-

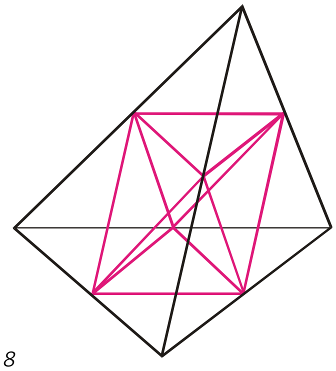

Рис.8

раэдра, так что для них утверждение тоже будет справедливо. Чтобы доказать его для додекаэдра и икосаэдра, рассмотрим пять вписанных в додекаэдр кубов, один из которых показан на рисунке 9. Из рисунка видно, что три пары ребер додекаэдра и три пары отрезков, соединяющих центры его граней (т.е. ребер икосаэдра), параллельны ребрам куба. Все множество ребер разбивается на пять таких наборов, для каждого из которых сумма квадратов соответствующих комплексных чисел равна нулю по утверждению 2.

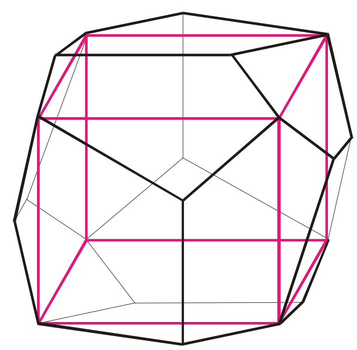

Рис.9

Это рассуждение показывает, что в случае додекаэдра и икосаэдра условие равенства нулю суммы квадратов не является достаточным, так как нулю должна равняться не только сумма по всему множеству ребер, но и по некоторым его подмножествам.

В заключение отметим еще одно свойство ортогональных проекций правильных многогранников: сумма квадратов длин проекций ребер не зависит от плоскости проекции. Для куба это немедленно следует из того, что сумма квадратов косинусов углов, образуемых тремя непараллельными ребрами куба с произвольной прямой, равна единице. Для остальных многогранников утверждение доказывается аналогично утверждению 2.