

Ортоцентрический треугольник

А.ЕГОРОВ

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ ПОГОВОРИМ о высотах треугольников.

Напомним прежде всего, что во всяком треугольнике высоты (точнее — прямые, на которых они лежат) пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Вот изящное доказательство этого факта. Возьмем произвольный треугольник ABC . Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — его высоты. Через вершины A , B и C проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис.1). В

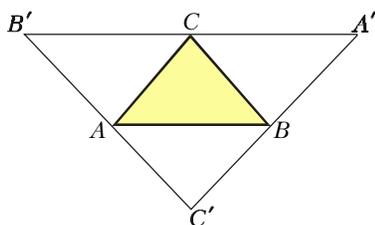


Рис. 1

результате получится треугольник $A'B'C'$, стороны которого параллельны AB , BC и AC соответственно. Прямые, перпендикулярные $A'B'$ в точке C , $B'C'$ в точке A и $A'C'$ в точке B , т.е. серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в точке H — центре описанной около $A'B'C'$ окружности. Но каждая из высот треугольника ABC лежит на одной из этих прямых.

Упражнение 1 (теорема Эйлера). Докажите, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан M , центр описанной окружности O и ортоцентр H

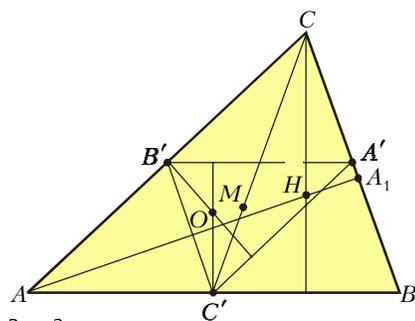


Рис. 2

лежат на одной прямой, и найдите, в каком отношении точка M делит отрезок OH . *Указание.* Пусть A' , B' , C' — середины сторон треугольника ABC (рис.2), H — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, а M — центр тяжести. Заметим, что точка O — ортоцентр треугольника $A'B'C'$, а при гомотетии с коэффициентом -2 и центром в точке M точки A' , B' , C' переходят в точки A , B и C соответственно, а точка O — в H .

При этом ортоцентр H лежит внутри треугольника ABC , если он остроугольный, и вне него, если ABC — тупоугольный треугольник (рис. 3, а, б). Для прямоугольного треугольника ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла (рис. 3, в).

Попутно отметим, что для тупоугольного треугольника ABC треугольник AHB (см.рис.3,б) — остроуголь-

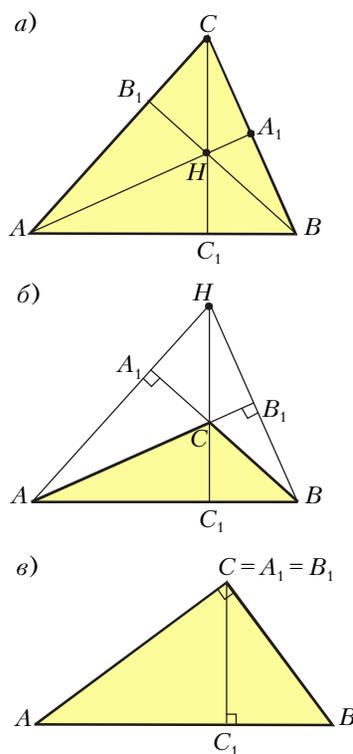


Рис. 3

ный с высотами AB_1 , BA_1 , HC_1 и ортоцентром C . Это замечание будет нам полезно в дальнейшем. Стоит также обратить внимание на то, что каждая из четырех точек A , B , C и H является ортоцентром треугольника, образованного остальными тремя точками.

Вспомогательная окружность

В дальнейшем будут использованы стандартные обозначения для сторон и углов треугольника: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Через R мы будем обозначать радиус описанной окружности, а через O — ее центр.

Начнем с задачи.

Задача. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.

Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC . Поскольку углы AA_1B и BB_1A — прямые, точки A , B_1 , A_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (рис.4,а). Поэтому $\angle B_1A_1B = \pi - \alpha$. Но это значит, что $\angle CA_1B_1 = \alpha$, и треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны по третьему признаку подобия. Если же ABC тупоугольный

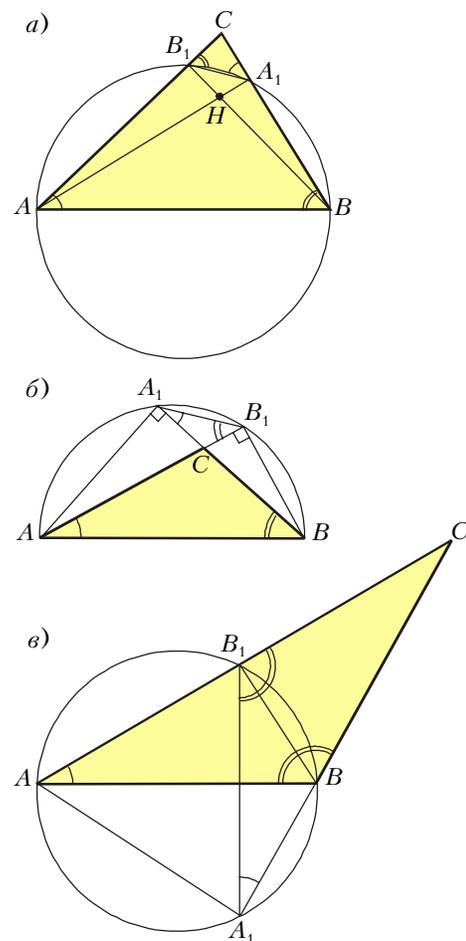


Рис. 4

и $\gamma > \pi / 2$ (рис.4,б), то точки A_1, B_1, B, A лежат на одной окружности, а углы A_1B_1A и ABA_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

Если C — острый, а B — тупой угол, то B_1BA_1A — вписанный четырехугольник (рис.4,в) и $\angle BA_1B_1 = \angle A$, что доказывает утверждение задачи и в этом случае.

Во всех трех случаях при доказательстве равенства углов была использована окружность, содержащая 4 точки интересующей нас конфигурации. Дальше этот прием будет применяться неоднократно.

Отметим еще, что коэффициент подобия треугольников ABC и A_1B_1C равен

$$k = \frac{B_1C}{BC} = \cos \gamma, \text{ если } \gamma < \pi / 2,$$

и

$$k = |\cos \gamma|, \text{ если } \gamma > \pi / 2.$$

Упражнения

2. Найдите сторону AB треугольника ABC , если $A_1B_1 = l$, а $\angle C = \gamma$.

3. Найдите угол C треугольника ABC , если отрезок A_1B_1 а) равен R , где R — радиус описанной около него окружности; б) равен $\frac{1}{2}R$. в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?

4. Докажите, что прямые OC и A_1B_1 перпендикулярны.

5. Пусть R — радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , а p_1 — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC .

Замечание. Внимательно разглядывая рисунок 4,а, нетрудно заметить, что

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Аналогично, из рисунка 4,б

$$\angle B_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Эти соотношения нам тоже пригодятся в дальнейшем.

Ортоцентрический треугольник

Ортоцентрическим треугольником для данного треугольника ABC называется треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями его высот. Ясно, что если исходный треугольник не является прямоугольным, то ортоцентрический треугольник существует.

Выразим углы ортоцентрического треугольника через углы данного. Сначала сделаем это для остроуголь-

ного треугольника. Прежде всего заметим (рис.5,а), что, как было ранее доказано, $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B = \alpha$. Поэтому в ортоцентрическом треугольнике

$$\angle A_1 = \pi - 2\alpha,$$

аналогично,

$$\angle B_1 = \pi - 2\beta, \angle C_1 = \pi - 2\gamma.$$

Попутно становится очевидным, что

$$\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A,$$

т.е. что высота AA_1 является биссектрисой угла A_1 ортоцентрического треугольника.

Итак, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника, а ортоцентр H — центром вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$ окружности.*

Упражнение 6. Найдите углы остроугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) равнобедренный с углом при вершине $2\pi / 3$; г) имеет углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Теперь найдем углы треугольника $A_1B_1C_1$, если угол C тупой.

Мы уже отметили ранее, что $\angle A_1B_1A = \beta$. Кроме того, в остроугольном треугольнике $A_1H_1B_1$ (рис.5,б) AB_1, BA_1, HC_1 — высоты, так что треугольник $A_1B_1C_1$ является ортоцентрическим и для $A_1H_1B_1$. Мы уже видели, что

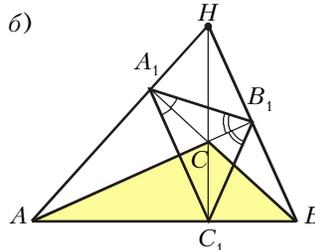
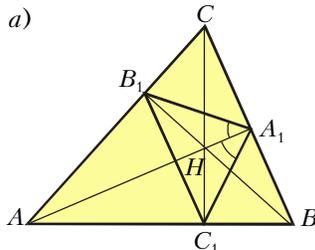


Рис. 5

$\angle A_1B_1A = \beta$, а высота AB_1 — биссектриса угла B_1 . Поэтому $\angle B_1 = 2\beta$. Аналогично, $\angle A_1 = 2\alpha$, а $\angle C_1 = 2\gamma - \pi$.

Упражнения

7. Найдите углы тупоугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равно-

бедренный прямоугольный; в) имеет углы $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.

8. Найдите углы треугольников, подобных своим ортоцентрическим треугольникам.

9. Сколько существует (с точностью до подобия) треугольников, ортоцентрический треугольник которых неравнобедренный и имеет углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$?

10. Вторым ортоцентрическим треугольником для данного треугольника называется ортоцентрический треугольник его ортоцентрического треугольника. Найдите углы треугольника, если его второй ортоцентрический треугольник правильный.

Ортоцентр и описанная окружность

Снова начнем с остроугольного треугольника ABC . Пусть H — его ортоцентр. Опшем около ΔABC окружность. Пусть H_1, H_2, H_3 — точки пересечения продолжений высот исходного треугольника с описанной окружностью (рис.6).

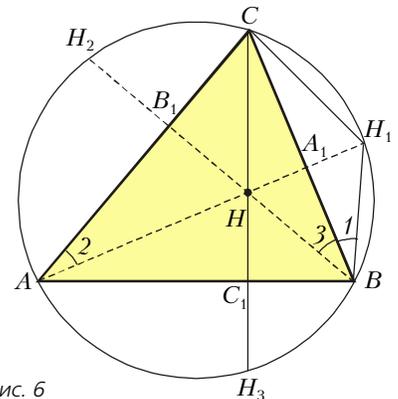


Рис. 6

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (как вписанные), а $\angle 2 = \angle 3$ (это острые углы двух прямоугольных треугольников с общим углом C), получаем, что $\angle 1 = \angle 3$, а треугольник $H_1B_1H_3$ равнобедренный, так как его высота BA_1 является биссектрисой. Следовательно, $HA_1 = A_1H_1$, т.е.

точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, лежит на описанной окружности. ()*

А так как треугольники CHB и CH_1B равны, радиус окружности, описанной около треугольника CHB , равен R . Итак, на рисунке 7 радиусы всех четырех окружностей равны. Заметим попутно, что треугольники $H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом 2. Поэтому радиус окружности, описанной около ортоцентрического треугольника, равен $R/2$.

Если треугольник ABC тупоугольный, то $A_1B_1C_1$ является ортоцентри-

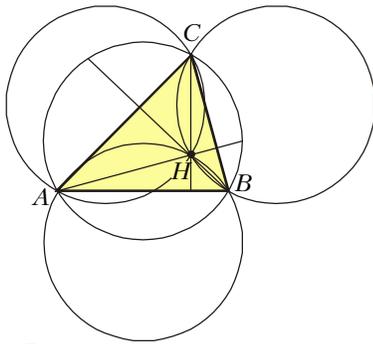


Рис. 7

чеким треугольником и для треугольника AHB и, по только что доказанному, радиус его описанной окружности тоже равен $R/2$.

Утверждение (*), доказанное для остроугольных треугольников, справедливо и для тупоугольных треугольников. В самом деле (рис.8), опишем окружность около остроугольного треугольника AHB . Мы уже доказали,

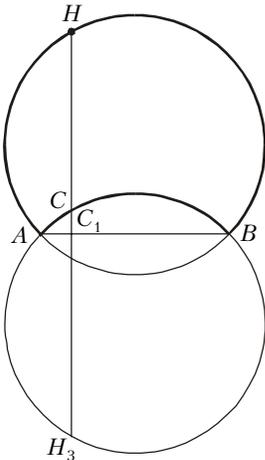


Рис. 8

что окружности ACB , AHB , HCB и ACH имеют одинаковые радиусы. Поэтому, например, окружности ACB и AHB симметричны относительно прямой AB . Но это и значит, что при симметрии относительно AB точка H_3 , симметричная точке H , оказывается на окружности ABC . Аналогично рассуждаем и о точках H_1 и H_2 .

Упражнение 11. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через середины сторон треугольника ABC и через середины отрезков AH , BH и CH , соединяющих его ортоцентр с вершинами. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

Экстремальное свойство

Будем говорить, что треугольник KLM вписан в треугольник ABC , если его вершины K, L, M лежат на сторонах AB, BC и CA соответственно.

Теорема. Из всех треугольников KLM минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.

Интересно отметить, что если треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный, то вписанного в него треугольника минимального периметра не существует (он вырождается в высоту, опущенную из вершины наибольшего угла).

Вспомогательная задача. Пусть дан острый угол ACB с вершиной C и точка M внутри него. Найдите на сторонах AC и CB точки K и L так, чтобы треугольник KLM имел минимальный периметр.

Построим точки M' и M'' , симметричные точке M относительно сторон AC и BC , и рассмотрим ломаную $M''LKM'$ (рис.9). Ее длина равна периметру треугольника KLM . Ясно,

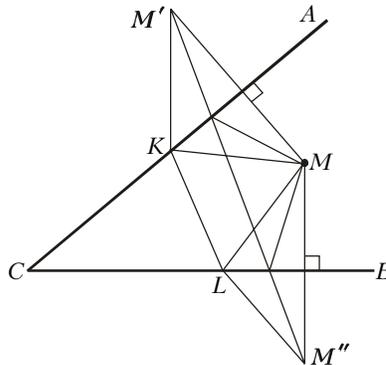


Рис. 9

что длина отрезка $M'M''$ не больше длины этой ломаной и совпадает с ней только тогда, когда точки K и L совпадают с точками пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами угла. Задача решена.

Упражнение 12. Докажите, что такие точки K и L существуют, т.е. что отрезок $M'M''$ пересекает лучи CA и CB .

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Возьмем на стороне AB треугольника ABC точку M . Отразим точку M относительно сторон AC и BC и соединим точки M' и M'' (рис.10).

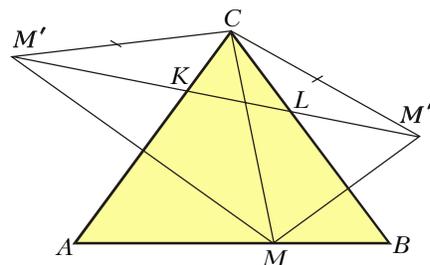


Рис. 10

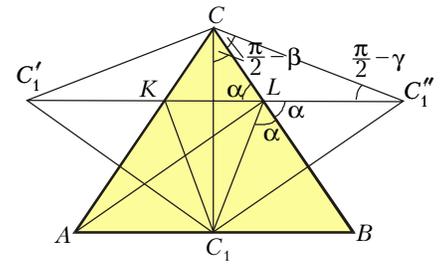


Рис. 11

Мы уже знаем, что периметр треугольника KLM меньше периметра любого треугольника с вершиной в точке M , вписанного в треугольник ABC . Осталось найти точку M так, чтобы периметр KLM был минимальным. Заметим, что треугольник $M''CM'$ равнобедренный, а $\angle M''CM' = 2\gamma$ – постоянный угол. Поэтому периметр ΔKLM минимален, если минимален отрезок $M'M''$. Но отрезок $M'M''$ минимален, когда минимальна сторона $M'C$. Поскольку $M'C = MC$, искомый минимум достигается, когда MC – высота треугольника ABC , т.е. когда $M = C_1$ (рис. 11).

Рассмотрим теперь треугольник C_1KL и докажем, что $L = A_1$. Но это просто. В самом деле, $\angle C_1CC_1'' = 2\gamma$. Поэтому

$$\angle CC_1''L = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

$$\angle C_1''CL = \angle BCC_1 = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\begin{aligned} \angle CLK &= \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \beta = \\ &= \pi - (\gamma + \beta) = \alpha, \end{aligned}$$

$$\angle C_1LB = \angle C_1''LB = \angle CLK = \alpha.$$

Но тогда $\angle CLC_1 = \pi - \alpha$ и четырехугольник CLC_1A вписанный (снова вспомогательная окружность!). Поэтому

$$\angle CLA = \angle CC_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Мы могли бы рассуждать и иначе. Предположим, что точка L не есть основание высоты AA_1 . Тогда треугольник, построенный в соответствии с вспомогательной задачей, имеет периметр, меньший периметра треугольника C_1KL , что невозможно.

Итак, K и L – основания высот треугольника ABC . А это и значит, что $L = A_1$. Аналогично, $K = B_1$.

Тем самым экстремальное свойство треугольника $A_1B_1C_1$ доказано.