Разновески

И.ГОЛЬДЕС, С.ТАСМУРАТОВ, С.ТАСМУРАТОВА

НАБОР ТРЕХ ОДИНАКОВЫХ ПО массе гирек обладает примечательным свойством: если любую из этих гирек отложить в сторону, то остальные можно уравновесить на двух чашах весов. Таким же свойством обладает набор из любого нечетного количества одинаковых гирек. Любопытно, что существуют и наборы различающихся по массе гирек, с которыми можно поступать похожим образом. О свойствах этих наборов будет рассказано в данной статье.

Чтобы отличать рассматриваемые наборы гирек от всех остальных, давайте условимся использовать специальный термин. Набор гирек назовем *примечательным*, если после удаления любой гирьки из этого набора оставшиеся можно разложить по двум чашам весов так, что весы окажутся в равновесии.

В примечательном наборе количество гирек нечетно

Сначала предположим, что массы гирек в примечательном наборе выражаются целыми числами (граммов или килограммов – для нас это несущественно).

Утверждение 1. *Числа, выражающие массы гирек в примечательном наборе, имеют одинаковую четность.*

Обозначим массы гирек a_1, a_2, … …, a_n; пусть $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Поскольку числа $S - a_i$ (i пробегает значения 1, 2, …, n) четные, то все числа a_1, a_2, …, a_n имеют одинаковую четность.

Утверждение 2. *Если массы гирек в примечательном наборе выражаются нечетными числами, то количество гирек нечетно.*

Это утверждение следует из того факта, что сумма масс гирек, оставшихся в наборе после удаления любой одной из них, должна быть четной.

Утверждение 3. *Если массы гирек в примечательном наборе выражаются целыми числами, то число гирек нечетно.*

Заметим, что после увеличения или уменьшения масс гирек в примечательном наборе в одно и то же количество раз свойство примечательности набора сохраняется. Если массы гирек в наборе выражаются четными числами, то образуем новый примечательный набор делением всех масс на наибольшую возможную степень двойки. В полученном после такой операции примечательном наборе присутствует по крайней мере одна гирька с нечетной массой, поэтому и все гирьки такого набора имеют нечетные массы (см. утверждение 1). Следовательно, гирек в этом наборе нечетное количество (утверждение 2).

В примечательном наборе нечетное количество гирек будет даже в том случае, если их массы выражаются произвольными действительными числами.

Доказательство этого факта требует привлечения сведений, выходящих за рамки школьной программы, поэтому мы приведем лишь идею доказательства. Как и прежде, будем полагать, что массы гирек примечательного набора выражаются числами a_1, a_2, …, a_n ($n > 2$). Условия равновесия гирек запишем в виде совокупности равенств:

$$\begin{aligned} &0 \cdot a_1 + p_{12}a_2 + \ldots + p_{1n}a_n = 0, \\ &p_{21}a_1 + 0 \cdot a_2 + \ldots + p_{2n}a_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &p_{n1}a_1 + p_{n2}a_2 + \ldots + 0 \cdot a_n = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь коэффициенты p_{ij} при $i \neq j$ равны либо 1 (при i-м взвешивании j-я гирька находится на левой чаше весов), либо –1 (при i-м взвешивании j-я гирька находится на правой чаше весов); $p_{ii} = 0$ (при i-м взвешивании i-я гирька отложена в сторону). Совокупность равенств (1) можно рассматривать как систему уравнений относительно переменных a_1, a_2, …, a_n. Эта система всегда имеет тривиальное решение $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ (проверьте!).

Если же у системы существует хотя бы одно нетривиальное решение, то, оказывается, различных ненулевых решений существует бесконечное множество! Например, решениями системы

$$\begin{aligned} a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 - a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0, \\ -a_1 - a_2 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 &= 0, \\ a_1 - a_2 - a_3 + a_5 + a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 + a_2 + a_3 - a_4 + a_6 - a_7 &= 0, \\ a_1 - a_2 + a_3 - a_4 - a_5 + a_7 &= 0, \\ -a_1 - a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

являются $a_1 = \frac{1}{13}a_7$; $a_2 = \frac{3}{13}a_7$; $a_3 = \frac{5}{13}a_7$; $a_4 = \frac{7}{13}a_7$; $a_5 = \frac{9}{13}a_7$; $a_6 = \frac{11}{13}a_7$, где переменная a_7 может принимать любые значения (пожалуйста, проверьте). Такая переменная называется свободной переменной. Полагая значение переменной a_7 равным любому целому числу, кратному 13, для остальных переменных также получим целые значения. В общем случае у системы (1) при различных значениях коэффициентов p_{ij} свободных переменных может получиться несколько: $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Можно показать, что остальные переменные выражаются через них в виде комбинаций $r_1a_{i_1} + r_2a_{i_2} + \ldots + r_ka_{i_k}$, где $r_1, r_2, \ldots, r_k$ – некоторые *рациональные* числа. Последнее обстоятельство позволяет так подобрать целые значения свободных переменных $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, что все выражения $r_1a_{i_1} + r_2a_{i_2} + \ldots$ $\ldots + r_ka_{i_k}$, в которых они используются (а значит, и все остальные переменные), окажутся целыми числами. Таким образом, если существует произвольное нетривиальное решение системы уравнений (1) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то существует также решение этой системы, выраженное *целыми* числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Гирек с массами $b_1, b_2, \ldots, b_n$ в примечательном наборе может быть лишь нечетное количество. Стало быть, и в случае примечательного набора гирек, массы которых выражаются произвольными действительными числами, количество гирек нечетно.

Упражнение 1. В примечательном наборе используются гирьки с массами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ граммов. Докажите, что из твердых стержней с длинами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сантиметров, соединяя их шарнирно, можно образовать многоугольник, который деформируется в равнобедренный треугольник с любым основанием a_i ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Сколько гирек в примечательном наборе?

Мы уже знаем, что в случае равных масс в примечательном наборе может содержаться произвольное нечетное