мален: $\theta = \theta_{max}$ и

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{max}}{2} = \frac{\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2}{2\sqrt{1+\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2}} = \frac{GM/\left(Rv_\infty^2\right)}{\sqrt{1+2GM/\left(Rv_\infty^2\right)}}.$$

Отсюда следуют важные частные случаи:

1) Если $v_\infty \gg v_{2к}$, то $b_{min} \approx R$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\left(\theta_{max}/2\right) \approx 0{,}5\left(v_{2к}/v_\infty\right)^2 = GM/\left(Rv_\infty^2\right).$$

Так как $v_{2к}/v_\infty \ll 1$, то

$$\theta_{max} \approx \frac{2GM}{Rv_\infty^2}$$

(мы учли, что при $x \to 0$ $\operatorname{tg} x \approx x$).

2) Если $v_\infty \ll v_{2к}$, то формула для угла рассеяния приводится к виду

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_{max}}{2} \approx \frac{v_{2к}}{2v_\infty}.$$

В предельном случае, когда $v_{2к}/v_\infty \to \infty$, получаем $\operatorname{tg}\left(\theta_{max}/2\right) \to \infty$ и, следовательно, $\theta_{max} \to 180^\circ$. Таким образом, при достаточно малых значениях v_∞ направление скорости частицы при облете центрального тела (планеты или звезды) изменится практически на противоположное!

Заметим, что обсуждаемую задачу можно решить, исходя из уравнения траектории частицы в полярных координатах:

$$\frac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi, \qquad (6)$$

где φ – полярный угол, $p = L^2/(2m\alpha)$ – фокальный параметр частицы, $\varepsilon = \sqrt{1+2EL^2/\left(\alpha^2 m\right)}$ – эксцентриситет орбиты, $\alpha = GMm$, причем $m \ll M$, E и L – полная механическая энергия и момент импульса частицы соответственно. Из начальных условий получаем

$$E = E_\infty = \frac{mv_\infty^2}{2},\; L = L_\infty = mbv_\infty.$$

Следовательно, эксцентриситет орбиты равен

$$\varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{bv_\infty^2}{GM}\right)^2}. \qquad (7)$$

Так как $\varepsilon > 1$, частица движется по гиперболической траектории. Из выражения (6) следует, что при $\varphi = 0$ расстояние r минимально и равно

$$r_m = \frac{p}{1+\varepsilon} = a(\varepsilon - 1), \qquad (8)$$

где $a = p/\left(\varepsilon^2 - 1\right) = \alpha/(2E)$ – полуось гиперболы. Легко убедиться в том, что формулу (8) можно привести к виду (4).

Определим угол φ_m между линией, соединяющей точки O и B (полярной осью), и направлением асимптоты K_1N_1, к которой приближается траектория частицы, удаляющейся в бесконечность (см. рис.1). Поскольку при $\varphi = \varphi_m$ $r = \infty$, то из формулы (6) получаем

$$\cos\varphi_m = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Угол отклонения θ и угол φ_m связаны соотношением $\theta = -\pi + 2\varphi_m$, поэтому последнее равенство принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}.$$

Эту формулу можно получить непосредственно из свойств гиперболы. Подставляя сюда выражение (7) для ε, опять получаем формулу (5).

Задача 2. Отклонение светового луча Солнцем

Оцените угол отклонения θ луча света при его прохождении вблизи поверхности Солнца. Масса Солнца $M = 2\cdot 10^{30}$ кг, его радиус $R = 7\cdot 10^8$ м.

Будем считать, что свет состоит из корпускул массой m. Так как корпускула имеет массу, ее траектория должна искривляться под действием силы гравитации, подобно тому как искривляются траектории обычных частиц или тел, движущихся в полях тяготения планет и звезд.

Предположим, что световая корпускула движется в поле тяготения звезды по гиперболической траектории (см. рис.1).Если рассматривать световую корпускулу как классическую частицу с кинетической энергией $E_k = mv^2/2 = mc^2/2$, то для оценки угла θ можем воспользоваться результатами задачи 1: формула (5) теперь принимает вид

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{GM}{bc^2},$$

где $b \gtrsim R$. Легко убедиться в том, что для обычных небесных тел массой M и радиусом R выполняется условие

$$\frac{GM}{rc^2} \ll 1,\; R \le r \le \infty,$$

которое называют условием, или приближением, слабого поля (именно при этом условии поля тяготения являются ньютоновскими). Например, на поверхности Солнца $GM/\left(Rc^2\right) \approx 10^{-6}$. Учитывая малость угла θ, можно записать

$$\theta = \frac{2GM}{bc^2},$$

тогда для светового луча, проходящего вблизи поверхности звезды ($b \approx R$), получим

$$\theta \approx \frac{2GM}{Rc^2}.$$

Для Солнца $\theta \approx 0{,}87''$.

Заметим, что минимальное расстояние r_m по-прежнему определяется формулой (4), которая при $v_\infty = c$ принимает вид

$$r_m = \frac{GM}{c^2}\left(\sqrt{1+\left(\frac{bc^2}{GM}\right)^2} - 1\right) \approx b\left(1 - \frac{GM}{bc^2}\right).$$

Очевидно, что рассмотренный способ решения задачи является некорректным с точки зрения современной физической теории. Действительно, в рамках данного способа скорость световой корпускулы изменяется от $v_\infty = c$ до $v_m = bv_\infty/r_m = bc/r_m$. Понятно, что при $b \approx r_m \approx R$ $v_m \approx v_\infty = c$, но это приближение ничего не меняет по существу: скорость света остается переменной величиной. Кроме того, теперь мы знаем, что классическая формула $E_k = mv^2/2$, где $v \ll c$, к световым частицам не применима: энергия световой частицы, т.е. кванта света, или фотона, определяется формулой Планка – Эйнштейна

$$E = mc^2 = \hbar\omega,$$

а скорость фотона в вакууме всегда равна c.

Теперь решим задачу другим способом, исходя из квантовой теории света. Метод решения задачи остается прежним: воспользуемся законами сохранения энергии и момента импульса фотона (кванта света), движущегося в слабом поле тяготения звезды. Полная энергия фотона равна

$$E = \hbar\omega - \frac{GMm}{r} = \hbar\omega\left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right) = \text{const}$$

(мы учли, что масса фотона равна $m = \hbar\omega/c^2$). Момент импульса фотона равен

$$L = rmc\sin\alpha = r\frac{\hbar\omega}{c}\sin\alpha = \text{const}.$$

Рассмотрим движение фотона на участке AB траектории, которую по-прежнему будем считать гиперболической (см. рис.1). Законы сохранения энергии: $E_A = E_B$ и момента им-