и $\gamma > \pi / 2$ (рис.4,*б*), то точки A_1, B_1, B, A лежат на одной окружности, а углы A_1B_1A и ABA_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

Если C — острый, а B — тупой угол, то B_1BA_1A — вписанный четырехугольник (рис.4,*в*) и $\angle BA_1B_1 = \angle A$, что доказывает утверждение задачи и в этом случае.

Во всех трех случаях при доказательстве равенства углов была использована окружность, содержащая 4 точки интересующей нас конфигурации. Дальше этот прием будет применяться неоднократно.

Отметим еще, что коэффициент подобия треугольников ABC и A_1B_1C равен

$$k = \frac{B_1C}{BC} = \cos\gamma, \text{ если } \gamma < \pi / 2,$$

и

$$k = |\cos\gamma|, \text{ если } \gamma > \pi / 2.$$

Упражнения

2. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $A_1B_1 = l$, а $\angle C = \gamma$.

3. Найдите угол C треугольника ABC, если отрезок A_1B_1 а) равен R, где R — радиус описанной около него окружности; б) равен $\frac{1}{2}R$. в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?

4. Докажите, что прямые OC и A_1B_1 перпендикулярны.

5. Пусть R — радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а p_1 — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Замечание. Внимательно разглядывая рисунок 4,*а*, нетрудно заметить, что

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Аналогично, из рисунка 4,*б*

$$\angle B_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Эти соотношения нам тоже пригодятся в дальнейшем.

Ортоцентрический треугольник

Ортоцентрическим треугольником для данного треугольника ABC называется треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями его высот. Ясно, что если исходный треугольник не является прямоугольным, то ортоцентрический треугольник существует.

Выразим углы ортоцентрического треугольника через углы данного. Сначала сделаем это для остроугольного треугольника. Прежде всего заметим (рис.5,*а*), что, как было ранее доказано, $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B = \alpha$. Поэтому в ортоцентрическом треугольнике

$$\angle A_1 = \pi - 2\alpha,$$

аналогично,

$$\angle B_1 = \pi - 2\beta, \ \angle C_1 = \pi - 2\gamma.$$

Попутно становится очевидным, что

$$\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A,$$

т.е. что высота AA_1 является биссектрисой угла A_1 ортоцентрического треугольника.

Итак, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника, а ортоцентр H — центром вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$ окружности.*

Упражнение 6. Найдите углы остроугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) равнобедренный с углом при вершине $2\pi / 3$; г) имеет углы α_1, β_1, γ_1.

Теперь найдем углы треугольника $A_1B_1C_1$, если угол C тупой.

Мы уже отметили ранее, что $\angle A_1B_1A = \beta$. Кроме того, в остроугольном треугольнике AHB (рис.5,*б*) AB_1, BA_1, HC_1 — высоты, так что треугольник $A_1B_1C_1$ является ортоцентрическим и для AHB. Мы уже видели, что

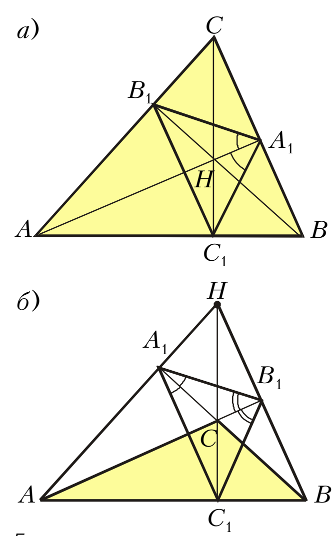

Рис. 5

$\angle A_1B_1A = \beta$, а высота AB_1 — биссектриса угла B_1. Поэтому $\angle B_1 = 2\beta$. Аналогично, $\angle A_1 = 2\alpha$, а $\angle C_1 = 2\gamma - \pi$.

Упражнения

7. Найдите углы тупоугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) имеет углы $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

8. Найдите углы треугольников, подобных своим ортоцентрическим треугольникам.

9. Сколько существует (с точностью до подобия) треугольников, ортоцентрический треугольник которых неравнобедренный и имеет углы α_1, β_1, γ_1?

10. Вторым ортоцентрическим треугольником для данного треугольника называется ортоцентрический треугольник его ортоцентрического треугольника. Найдите углы треугольника, если его второй ортоцентрический треугольник правильный.

Ортоцентр и описанная окружность

Снова начнем с остроугольного треугольника ABC. Пусть H — его ортоцентр. Опишем около ΔABC окружность. Пусть H_1, H_2, H_3 — точки пересечения продолжений высот исходного треугольника с описанной окружностью (рис.6).

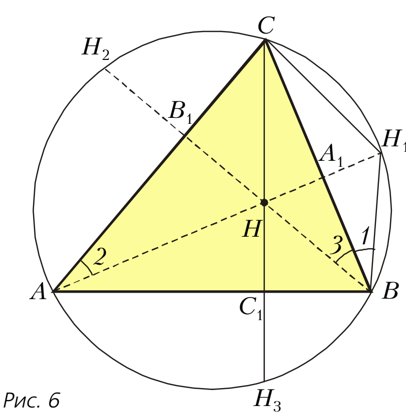

Рис. 6

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (как вписанные), а $\angle 2 = \angle 3$ (это острые углы двух прямоугольных треугольников с общим углом C), получаем, что $\angle 1 = \angle 3$, а треугольник HBH_1 равнобедренный, так как его высота BA_1 является биссектрисой. Следовательно, $HA_1 = A_1H_1$, т.е.

точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, лежит на описанной окружности. (*)

А так как треугольники CHB и CH_1B равны, радиус окружности, описанной около треугольника CHB, равен R. Итак, на рисунке 7 радиусы всех четырех окружностей равны. Заметим попутно, что треугольники $H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом 2. Поэтому радиус окружности, описанной около ортоцентрического треугольника, равен $R/2$.

Если треугольник ABC тупоугольный, то $A_1B_1C_1$ является ортоцентри-