ми должен обладать этот четырехугольник, если известны какие-то свойства тетраэдра, например если тетраэдр правильный?

Оказывается, что, рисуя четырехугольник, не нужно заботиться о соблюдении каких-либо условий. Точнее, справедливо следующее.

Теорема Польке–Шварца. *Любой четырехугольник на плоскости может быть получен как параллельная проекция правильного тетраэдра.*

Доказательство. Четырехугольник с точностью до подобия определяется четырьмя параметрами: отношением диагоналей, углом между диагоналями и отношениями отрезков, на которые диагонали делятся точкой их пересечения. Пусть дан четырехугольник $A'B'C'D'$, диагонали которого пересекаются в точке O. На ребрах AC и BD правильного тетраэдра $ABCD$ возьмем точки O_1 и O_2, такие что $AO_1/O_1C = A'O/OC'$ и $BO_2/O_2D = B'O/OD'$. Если проектировать тетраэдр на любую плоскость параллельно прямой O_1O_2, то диагонали полученного четырехугольника будут делиться точкой пересечения в тех же отношениях, что и диагонали данного. Осталось показать, что за счет выбора плоскости проекции можно получить нужные значения двух оставшихся параметров. Поскольку противоположные ребра тетраэдра равны и перпендикулярны, это утверждение можно переформулировать так:

Дан прямоугольный равнобедренный треугольник PXY ($\angle P = 90°$) и проходящие через его вершины X и Y параллельные прямые, не лежащие в его плоскости. Тогда на этих прямых найдутся такие точки X', Y', что отношение PX'/PY' и угол $X'PY'$ равны наперед заданным величинам.

Этот факт можно доказать теми же рассуждениями, что и утверждение

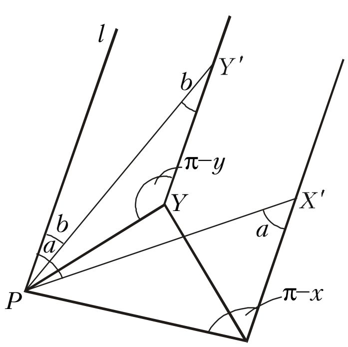

Рис.6

1. Однако мы используем для доказательства формулу (∗). Проведем через P прямую l, параллельную данным прямым, проходящим через X и Y. Пусть угол между плоскостями φ и ψ, первая из которых содержит прямые l и PX, вторая l и PY, равен γ, а углы, которые l образует с PX и PY, равны x и y соответственно. Проведем через P две прямые, лежащие в плоскостях φ и ψ и образующие с l углы a и b. Точки их пересечения с параллельными l прямыми, проходящими через X и Y, обозначим X', Y' (рис.6). Тогда (по теореме синусов)

$$PX'/PX = \sin x/\sin a,$$

$$PY'/PY = \sin y/\sin b,$$

и

$$PX'/PY' = \sin x/\sin y \cdot \sin b/\sin a.$$

Таким образом, отношение PX'/PY' определяется отношением синусов углов a и b, и можно сделать эти синусы сколь угодно малыми, оставляя их отношение постоянным. При этом знаки их косинусов могут быть как одинаковыми, так и противоположными. Пусть $\angle X'PY' = c$. Из формулы (∗), примененной к трехгранному углу с ребрами l, PY', PX' следует, что при малых значениях $\sin a$, $\sin b$ значение $\cos\angle X'PY'$ близко к 1 при одинаковых знаках $\cos a$, $\cos b$ и к −1 при противоположных. Поэтому при некоторых a, b это значение равно заданному.

Теорема доказана.

Из рисунка 7 видно, что вершины правильного тетраэдра $ABCD$ и точки A', B', C', D', симметричные им относительно его центра тяжести (совпадающего с точкой пересечения высот), являются вершинами куба, а противоположные грани этого куба проходят через противоположные точки тетраэдра. Поскольку центр тяжести тетраэдра является серединой отрезка, соединяющего середины его двух противоположных ребер, а параллельное проектирование сохраняет середины отрезков, центр тяжести тетраэдра проецируется в центр тяжести его проекции. Отсюда следует, что вершины двух произвольных четырехугольников, симметричных относительно общего центра тяжести, можно считать параллельными проекциями вершин куба.

Рассмотрим теперь не просто параллельное, а ортогональное проек-

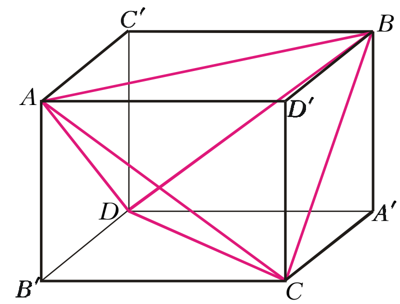

Рис.7

тирование правильного тетраэдра на плоскость. В этом случае уже нельзя получить произвольный четырехугольник. Действительно, отношения, в которых диагонали четырехугольника делятся точкой их пересечения, однозначно определяют направление проектирования, а значит, и его плоскость и остальные параметры четырехугольника.

Упражнение 5. Докажите, что если диагонали четырехугольника, являющегося ортогональной проекцией правильного тетраэдра, перпендикулярны, то одна из них делится точкой пересечения пополам.

Указание. Докажите, что если прямой угол при ортогональной проекции переходит в прямой, то одна из его сторон параллельна плоскости проекции.

Вывести условия, которым должен удовлетворять четырехугольник, являющийся ортогональной проекцией правильного тетраэдра, несложно, но они оказываются довольно громоздкими и малоинтересными. Однако эти условия неожиданно красиво записываются с помощью комплексных чисел.

Ортогональное проектирование и комплексные числа

Пусть четырехугольник $ABCD$ является ортогональной проекцией на плоскость правильного тетраэдра. Найдем координаты векторов, соответствующих его сторонам и диагоналям в произвольной декартовой системе координат, и сопоставим каждому такому вектору (x, y) комплексное число $x + iy$. Оказывается, сумма квадратов полученных шести чисел равна нулю. Отметим, что направления векторов можно выбирать произвольно, так как $(-z)^2 = z^2$ для любого комплексного числа z.

Справедливо и обратное: если сумма квадратов комплексных чисел, соответствующих сторонам и диаго-