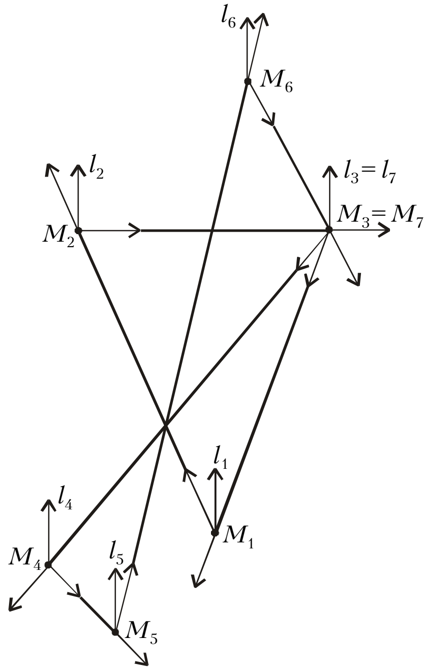

Рис.21

индекс этого 7-угольника равен −1, а сумма его углов равна 9π.

3) Применение формулы (5) к примерам рисунков 6—9 дает нам следующие значения индексов рассмотренных там многоугольников: $Ind = 1$, $Ind = 0$, $Ind = 2$. Обратите внимание, что наличие точки самопересечения на рисунках 8 и 9 при одинаковом количестве сторон не приводит к одному и тому же значению индекса.

4) Так как углы многоугольника мы считаем по их абсолютной (или, по-другому, неориентированной) величине, то их сумма всегда положительна и кратна π, поэтому $Ind_P \le \dfrac{n-1}{2}$. Значит,

$$\begin{aligned} &Ind_P \le k \text{ при нечетных } n = 2k+1 \\ &\text{и} \\ &Ind_P \le k-1 \text{ при четных } n = 2k. \end{aligned} \tag{8}$$

Покажем, что в обоих случаях существуют многоугольники с максимально возможным значением индекса, следовательно, с наименьшим значением суммы углов. Пусть $n = 2k + 1$. Возьмем на окружности вершины правильного вписанного n-угольника, обозначим их по порядку от M_1 до M_n при положительном направлении обхода окружности, начиная с произвольной вершины, и соединим их последовательно с пропуском $k - 1$ вершин: M_1 с M_{k+1}, M_{k+1} с M_{2k+1} и т.д., так что на

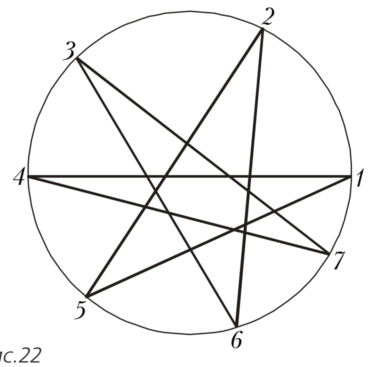

Рис.22

последнем шаге вершина M_{k+2} соединится с M_1 (см. рис.22 для $n = 7$, $k = 3$).

Упражнение 6. Докажите двумя способами, что для таким образом построенного многоугольника P сумма его внутренних углов равна π: первый раз вычислите сам угол при любой вершине и умножьте его на число вершин, а во второй раз покажите, что $Ind_P = k$ и примените формулу (5). Теперь «пошевелите» немного положение вершин многоугольника, и вы увидите, что первый способ вычисления суммы углов уже не сработает или же он будет чрезвычайно трудоемким, а второй способ вычисления практически не изменится. Вообще это очень полезное наблюдение, что малые изменения положения вершин многоугольника не изменяют ни индекса, ни значения суммы его углов, так как эти числа, будучи целыми или целократными π, не могут измениться «скачками» при малых изменениях составляющих их величин.

Для построения четностороннего n-угольника с максимальным индексом $\dfrac{n}{2} - 1$ поступаем следующим образом: возьмем на окружности $n = 2k$ точек как вершины правильного вписанного $2k$-угольника и на $2k - 1$ вершинах $M_1, M_2, \ldots, M_{2k-1}$ построим, как выше, $(2k-1)$-угольник с $Ind = k - 1$. Затем в этом многоугольнике заменим последнюю сторону $M_{k+1}M_1$ двумя сторонами $M_{k+1}M_{2k}$ и $M_{2k}M_1$. Получим n-угольник с прежним индексом $k - 1 = \dfrac{n}{2} - 1 = \max Ind$ (проверьте это утверждение).

Упражнения

7. Покажите, что не существует вписанного в окружность $2n$-угольника ($n > 2$), имеющего максимальный индекс и равные внутренние углы, опирающиеся на непересекающиеся дуги окружности.

8. Постройте вписанный в окружность $2n$-угольник с максимальным индексом, у которого все внутренние углы равны между собой.

9. Покажите, что для данного $n \ge 3$ существует n-угольник P_n с любым наперед заданным значением индекса, $0 \le Ind \le \max Ind$, где $\max Ind$ определен формулой (8).

Особые случаи

В самом начале статьи мы предположили, что ни одна сторона многоугольника не идет хотя бы частично по предыдущей (по направлению обхода) стороне, образуя с ней угол, который можно считать равным нулю или 2π. По этой причине для многоугольника P, у которого какая-либо сторона M_iM_{i+1} идет «назад» по предыдущей стороне $M_{i-1}M_i$, не представляется возможным однозначным образом определить сумму его углов. Такой многоугольник можно определить как предельное положение двух типов «невырожденных» многоугольников – назовем их типы P_+ и P_-, в первом из которых сторона M_iM_{i+1} расположена слева, а в другом – справа от предыдущей стороны $M_{i-1}M_i$ (рис.23). Для первого типа многоугольников угол α_i при

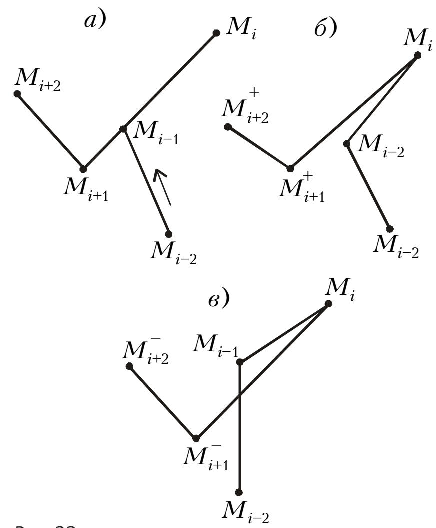

Рис.23

вершине M_i близок к нулю и в пределе для P получаем ту же сумму углов, что и у многоугольников типа P_+. Для второго типа угол α_i близок к 2π, поэтому в пределе для P получается сумма на 2π больше, чем в первом случае. Из этого рассмотрения видно, как сумма углов многоугольника может зависеть от появления или исчезновения точек самопересечения, но это уже другая интересная тема для размышлений.