сначала немного сузим общность рассматриваемой задачи и предположим, что ни одна сторона многоугольника P не идет хотя бы частично вдоль предыдущей стороны (но быть продолжением по прямой предыдущей стороны ей не запрещается). Обход окружности Γ порождает соответствующее направление обхода многоугольника P, так что каждая его сторона M_iM_{i+1} обходится от M_i к M_{i+1}. Стороны $M_{i-1}M_i$ и M_iM_{i+1} образуют при вершине M_i два угла, величина одного из них меньше π, а величина другого больше π (или, мы это тоже допускаем, оба они равны π). При движении от M_{i-1} к M_{i+1} через M_i один из этих углов будет располагаться слева, а другой – справа от направления обхода. Так вот, за значение угла многоугольника в вершине M_i мы *всегда* будем брать геометрическую (т.е. неориентированную) величину угла, расположенного *слева* при обходе $M_{i-1}M_iM_{i+1}$. Таким образом, значение угла α_i при вершине M_i всегда

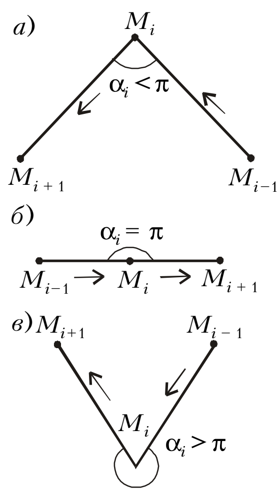

Рис.4

положительно, и или $0 < \alpha_i < \pi$ (рис.4,*а*), или $\alpha_i = \pi$ (рис.4,*б*), или $\pi < \alpha_i < 2\pi$ (рис.4,*в*).

Примеры

1) Пусть P – треугольник с указанным на рисунках 5,*а* или 5,*б* обходом от M_1 к M_3 через M_2. Тогда для треугольника на рисунке 5,*а* сумма

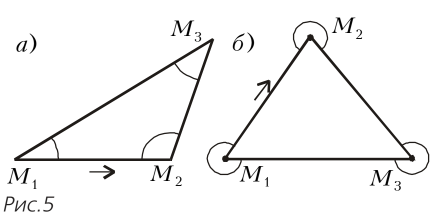

Рис.5

углов при его вершинах будет равна π, для рисунка 5,*б* эта сумма равна 5π, а вместе эти суммы составляют величину 6π. Очевидно, это общее свойство: если мы изменим направление обхода (или правило выбора углов), то сумма новых углов n-угольника вместе с суммой прежних углов будет равна $2n\pi$. Одни из этих углов можно условно назвать *внутренними*, а другие – *внешними* углами многоугольника. Обратим внимание, что, во-первых, в нашем определении внешние углы дополняют внутренние до 2π (а не до π, как обычно предполагается в учебниках), во-вторых, внутренние углы совпадают с обычным нашим восприятием, только если многоугольник не имеет самопересечений и обход его выбран так, что область внутри многоугольника остается слева. Такой обход многоугольника без самопересечений называется *положительным.*

2) Для четырехугольника без самопересечений, будь он выпуклым, как на рисунке 6,*а*, или невыпуклым, как на рисунке 6,*б*, сумма

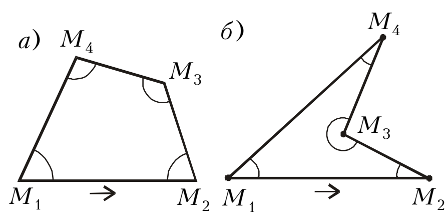

Рис.6

внутренних углов при положительном обходе равна $2\pi = \pi(n-2)$, где $n = 4$, т.е. «школьная» формула остается верной и в невыпуклом случае.

3) Рассмотрим четырехугольник с самопересечением (рис.7). Нетрудно показать, что сумма его углов, выбранных по указанному выше правилу, равна 4π (убедитесь в этом сами).

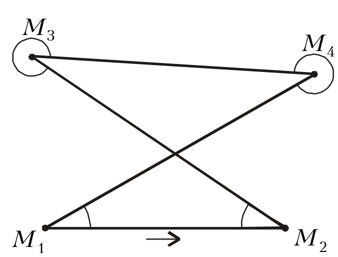

Рис.7

4) Рассмотрим теперь пятиугольник с самопересечением (рис.8). Пусть K – точка пересечения сторон

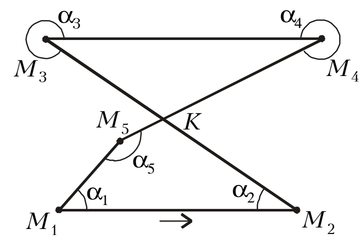

Рис.8

M_2M_3 и M_4M_5 и $K \neq M_5$. Сумма углов в четырехугольнике $M_1M_2KM_5$ равна 2π, а в треугольнике KM_3M_4 она равна π. Учитывая, что углы при вершине K в обеих этих фигурах равны, при вычитании получим

$$\pi = 2\pi - \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 +$$
$$+ \angle K - (2\pi - \alpha_3) - (2\pi - \alpha_4) - \angle K =$$
$$= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_3 + \alpha_4 - 4\pi,$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 5\pi.$$

Убедитесь сами, что при $K = M_5$ получится та же сумма 5π.

5) Наконец, если нам дан пятиугольник с таким самопересечением, как на рисунке 9, то можно

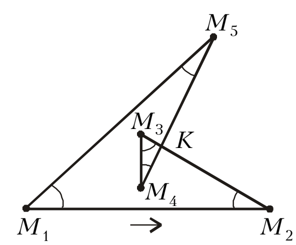

Рис.9

вычислить, что сумма его углов равна π (для этого вычтите из суммы углов треугольников $M_1M_2M_5$ и M_3M_4K сумму углов треугольника M_2KM_5).

Мы видим, что в отличие от «школьной» формулы $\pi(n-2)$, справедливой для суммы внутренних углов *любого* выпуклого n-угольника, примеры 2 и 3 дают разные суммы углов для разных видов четырехугольников, а примеры 4 и 5 снова дают разные суммы для двух пятиугольников, хотя оба они имеют самопересечение. Следовательно, вопрос об определении суммы углов не так прост, как это может показаться на первый взгляд.

Индекс кривой

Пусть на плоскости нам дана *гладкая* кривая L. Это значит, что кри-