

Санкт-Петербургский
государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики – процессов управления; дневное отделение)

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\sqrt{9 - x^2} = a + \sqrt{x^2 - ax}$$

имеет два решения.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{6} - x \right| = \operatorname{tg} 3x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(2x^2 - 3x) \leq \leq \log_2(x + 3).$$

4. Точка O является общим центром двух окружностей. Вершины треугольника ABC лежат на внешней окружности. Две его стороны касаются внутренней окружности, а третья сторона пересекает ее в точках M и N . Найдите отношение радиусов этих окружностей, если известно, что $\angle MON = \varphi$.

5. Две треугольные пирамиды $NABC$ и $MABC$ имеют общее основание ABC и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найдите длины ребер MA и MB , если известно, что они равны между собой и что длины всех остальных ребер обеих пирамид равны единице.

Вариант 2

(экономический факультет; дневное отделение)

1. Найдите число $x < -20$, если известно, что оно является седьмым членом некоторой бесконечной арифметической прогрессии, сумма первых семнадцати членов которой равна 51, а число $-6x$ также является членом этой прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\left| x - \frac{\pi}{3} \right| = \cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(10x - 8)(\log_x 2x - \log_2 x^2) \geq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x} = 3\sqrt{x + 1}.$$

5. В четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C прямые. Биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке M , а биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке N . Известно, что $BM = 10$, $AN = 6$ и $BN = 2$. Найдите CM и DM .

Вариант 3

(биолого-почвенный факультет; вечернее отделение)

1. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x(x + y) = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

имеет решение.

2. Решите уравнение

$$\frac{x + 4}{2 - \sqrt{x + 2}} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{1 + \sin 2x}(x + 4 - 2x^2) \leq 0.$$

4. В прямоугольник $ABCD$ площади S помещена окружность, касающаяся сторон AB , BC и AD . Найдите радиус этой окружности, если известно, что ее хорда, лежащая на диагонали AC прямоугольника, равна c .

5. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x} + |x|.$$

Публикацию подготовили
О.Иванов, А.Орлов, Ю.Чурин

Санкт-Петербургский
государственный технический
университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Сумма ненулевого числа A и 20% от числа B составляет 50% от B . Найдите отношение A/B .

2. Решите уравнение

$$2^{2x} \cdot 3^{4x} = 18^{x-1}.$$

3. Вычислите

$$(1 + 2 \sin 240^\circ)(1 - 2 \cos 240^\circ).$$

Установите, что это число – целое.

4. Вычислите

$$\log_3 5 \cdot \log_5 4 - \log_3 12.$$

5. Решите уравнение

$$5 - \sqrt{x - 4} = 4(x - 4).$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x \cdot 2^{-x}} = \sqrt{8x}.$$

7. Решите уравнение

$$\log_x(x^3 - 2x^2 + 2) = 0.$$

8. Вычислите $\arcsin(\sin 6)$.

9. Найдите $x + 1/x$, если

$$(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = 2x^2.$$

10. Решите уравнение

$$|x + 1| \cos x = 2x |\cos x|.$$

11. Найдите меньший корень уравнения

$$\lg^2 x + \lg(\sqrt{10}/x) = 2,5.$$

12. Решите неравенство

$$(x^3 - 1)(x^4 - 1) \leq 0.$$

13. Решите неравенство

$$(x + 4) \log_2(4 - x) \leq 0.$$

14. Найдите общие корни уравнений

$$\sin \pi x = 2x \text{ и } \cos \pi x = 4x^2 - 1.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x\sqrt{y} - y = 1. \end{cases}$$

16. Первый член геометрической прогрессии равен $b_1 = 1$. Найдите все целые отрицательные знаменатели q прогрессии, для которых сумма третьего и четвертого ее членов $b_3 + b_4$ не меньше $2q$.

17. Найдите координаты центров окружностей, касающихся трех прямых линий $y = x$, $y = x + 2$ и $y = -x$.

18. В равнобедренном треугольнике длина основания $a = 4$, а длина медианы, опущенной на боковую сторону, $m = 5$. Найдите площадь треугольника.

19. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом $a = 3$ и противлежащим углом $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра имеют одинаковую длину $l = 5$.

20. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - ax = 2a$ имеет два различных целочисленных решения?

Публикацию подготовили
Е.Подсытанин, С.Преображенский