на пространстве основных функций и есть пространство обобщенных функций. При этом «обычные» функции вкладываются в совокупность обобщенных функций, ибо каждая такая функция g порождает линейный функционал $l(f)=\int_T f(x)\overline{g}(x)dx$. А δ-функция Хевисайда — Дирака – это не что иное, как функционал, сопоставляющий основной функции ее значение в некоторой точке.

И пространство основных функций, и пространство обобщенных функций на окружности допускают другое (двойственное) описание – через ряды Фурье. Каждая бесконечно дифференцируемая функция f разлагается в ряд Фурье $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k e^{ikx}$. При этом коэффициенты Фурье убывают «быстрее любой степени» (это значит, что для любого целого числа m найдется константа C_m такая, что $\left|f_k\right| \le C_m / |k|^m$). А обобщенные функции – это формальные ряды $l(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k e^{ikx}$, где l_k растут «не быстрее некоторой степени» (т.е. существуют такие числа N и C, что $\left|l_k\right| \le C|k|^N$). Каждый такой ряд порождает функционал $l(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k \overline{f_k}$. В частности, функционалу, соответствующему δ-функции в нуле, соответствует формальный ряд $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ikx}$. Именно его и выписывал еще в XIX веке Хевисайд.

В 1958 году Гельфанд со своими учениками и коллегами осуществил издание серии монографий «Обобщенные функции», явившейся одним из самых замечательных произведений математической литературы прошлого (XX) века. Первые три тома серии были написаны И.М.Гельфандом и Г.Е.Шиловым. Они были посвящены общим проблемам теории обобщенных функций и теории дифференциальных уравнений.

Обобщенные функции оказались исключительно удачным аппаратом для теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными. Результаты, относящиеся к теории дифференциальных уравнений (особенно линейных), сыпались в пятидесятые-шестидесятые годы, как из рога изобилия. Здесь, помимо исследований Гельфанда и Шилова, надо назвать замечательный цикл работ шведского математика Хермандера, удостоенный филдсовской медали в 1962 году.

Преобразование Радона, интегральная геометрия и томография

В 1917 году австрийский математик И.Радон получил формулу обращения для отображения, сопоставляющего функции f на плоскости функцию $\hat{f}$ на множестве всех прямых на плоскости, равную интегралам от f вдоль всех прямых.

Это открытие имело большие последствия как в самой математике, так и в ее приложениях. Наиболее важным – вне всякого сомнения – оказалось приложение преобразования Радона к медицине, приведшее к рождению *томографии* – методу исследования скрытых в организме образований (опухолей, внутренних кровоизлияний и т.п.), заключающемуся в получении послойного изображения объекта при его облучении. Информация об объекте (мозге, печени, почки и т.п. восстанавливается (с помощью компьютера) по вычислению пространственного распределния интенсивности излучения, прошедшего через объект, с помощью преобразования Радона. Томография, безусловно, одно из величайших технических завоеваний второй половины предыдущего века.

Преобразование Радона оказалось путеводной звездой для исследований И.М.Гельфанда. Одной из великих задач, которые решались в XX веке, является задача о создании аналога ряда Фурье (гармонического анализа) для обобщений окружности – для многообразий, на которых действует группа преобразований (типа сферы, плоскости Лобачевского и т.п.). Аналог рядов Фурье на сфере был создан еще в XVIII веке (Лапласом, Лежандром и др.). Гармонический анализ на плоскости Лобачевского был создан лишь в сороковые годы XX века. А в пятидесятые годы Гельфанд со своими учениками открыл, что единым ключом к построению гармонического анализа являются преобразования типа преобразований Радона.

Солитоны

Одним из самых замечательных событий в математике второй половины двадцатого века явилось построение теории солитонов. Солитоны – это тип волн, обладающих весьма неожиданными свойствами. Уже сама первая встреча с такой «неожиданной волной» произвела на первооткрывателя необычного феномена – английского исследователя Джона Скотта Рассела – неизгладимое впечатление. Он увидел (после внезапной остановки баржи, плывшей по каналу) волну, которая приняла «форму большого одиночного возвышения, т.е. округлого, гладкого и четко выраженного водяного холма, который продолжал свой путь вдоль канала, не меняя своей формы и не снижая скорости». Подобные «уединенные» (solitary) волны стали называть *солитонами*: в этом названии как бы соединены понятия одинокой волны и частицы (типа электрон, протон и т.п.).

Теория подобных феноменов была дана физиками и математиками лишь в наше время. Они оказались связанными с нелинейными волновыми уравнениями, типа уравнений Кортевега–де Фриса, открытых век тому назад для описания поведения волн на «мелкой воде». Теория таких уравнений связана со скрытой симметрией, в них заключенной, и с обратными задачами в теории дифференциальных уравнений, которые рассматривались в начале пятидесятых годов Гельфандом, Левитаном и др. Солитонам посвящена замечательная книжка А.Т.Филиппова «Многоликий солитон», изданная в Библиотечке «Квант» (вып. 48).

Теория катастроф

Одним из фундаментальных философских принципов является знаменитый принцип «перехода количества в качество», явившийся существенным компонентом гегелевской диалектики. В недавние времена им мотивировалась неизбежность революций. Вот цитата из старого энциклопедического словаря: «Метод диалектики по самому существу своему революционен (Герцен назвал его «алгеброй революции»), ибо из него неизбежно вытекает, что развитие в природе и обществе приводит к скачкам». В наше время появилась математическая теория, описывающая явления, «приводящие к скачкам». Не лишено забавности то, что этот раздел математики получил название не «теории революций», а «тео-