ковые площади. Точка A_1 лежит на ребре DA, причем $DA_1 = \frac{2}{5}DA$, точка B_1 лежит на ребре DB, причем $DB_1 = \frac{5}{6}DB$, точка C_1 лежит на ребре DC. Известно, что площадь боковой поверхности пирамиды $DA_1B_1C_1$ составляет $\frac{47}{90}$ от площади боковой поверхности пирамиды $DABC$. Какую часть объема пирамиды $DABC$ составляет объем пирамиды $DA_1B_1C_1$?

6. Решите уравнение

$$\left(26+15\sqrt{3}\right)^x - 5\left(7+4\sqrt{3}\right)^x + 6\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = 5.$$

Вариант 8

(биологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{2-3x}{x+2} \le 5.$$

2. Решите уравнение

$$3\cos 2x + 4 + 11\sin x = 0.$$

3. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 6$, $AC = 4$, $BC = 8$. Точка D лежит на стороне AB, а точка E – на стороне AC, причем $AD = 2$, $AE = 3$. Найдите площадь треугольника ADE.

4. Решите неравенство

$$\log_4\left(16(x-2)^2\right)\cdot\log^2_{\frac{1}{16}}\frac{(x-2)^4}{64} - \frac{5}{4}\log_{64}\left(x^3-6x^2+12x-8\right)^2 \le \frac{15}{2}.$$

5. Внутри правильной треугольной призмы со стороной основания a лежат три шара одинакового радиуса, каждый из которых касается двух других шаров, двух боковых граней и обоих оснований призмы. Четвертый шар касается трех вышеупомянутых шаров и верхнего основания призмы. Найдите радиус четвертого шара.

Вариант 9

(факультет почвоведения)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{3-2x} \le 1.$$

2. Первый, второй и четвертый члены арифметической прогрессии одновременно являются первым, вторым и третьим членами соответственно некоторой геометрической прогрессии. Найдите все значения, которые может принимать знаменатель геометрической прогрессии.

3. Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если известно, что

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \text{ а } \sin 4\alpha > 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x 2 < \log_{6-x} 2.$$

5. Решите уравнение

$$\sin\left(\pi\sqrt{8-x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

6. Биссектрисы внутренних углов треугольника продолжены до точек пересечения с описанной около треугольника окружностью, отличных от вершин исходного треугольника. В результате попарного соединения этих точек получился новый треугольник. Известно, что углы исходного треугольника равны 30°, 60° и 90°, а его площадь равна 2. Найдите площадь нового треугольника.

7. Найдите все значения параметра a, при которых при любых значениях параметра b уравнение

$$|x-2| + b|2x+1| = a$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 10

(геологический факультет)

1. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2}}(5x-4) \le 8.$$

2. Вычислите $\operatorname{tg} 2x$, если

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{5}.$$

3. От причала A к причалу B отплыли катер и лодка, причем скорость катера в 5 раз больше скорости лодки. Известно, что они плыли с постоянными скоростями, но катер сделал несколько остановок. Сколько времени катер затратил на все остановки, если он доплыл до причала B за 2 часа, а лодка за 4 часа?

4. Решите неравенство

$$4\cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x \le 3.$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y} = 30, \\ x^2+y^2 = 325. \end{cases}$$

6. В трапецию с основаниями 3 и 5 можно вписать окружность и около нее можно описать другую окружность. Вычислите площадь пятиугольника, образованного радиусами вписанной окружности, перпендикулярными боковым сторонам трапеции, ее меньшим основанием и соответствующими отрезками боковых сторон.

7. Решите уравнение

$$2\left(2-x^2-x\right) = \sqrt{1-x^2}\cdot\left(3x^2-6x+4\right).$$

8. В прямоугольном параллелепипеде, стороны основания которого a и b, а высота a, расположены 9 шаров. Восемь из них одинакового радиуса, причем каждый касается трех граней параллелепипеда и двух соседних шаров. Девятый шар внешним образом касается всех восьми вышеуказанных шаров. Найдите R – радиус девятого шара. Установите, при каких значениях величины $\frac{b}{a}$ задача имеет решение, если $R \le \frac{a}{4}$.

Вариант 11

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\sqrt{3x+2} = 2x - 4.$$

2. Решите уравнение

$$|2x+8| - |x-5| = 12.$$

3. Аэронавт совершил кругосветное путешествие вокруг Земли на воздушном шаре, двигаясь вдоль заданной параллели на постоянной высоте. Оказалось, что разность расстояний, пройденных верхней и нижней точками шара, вдвое превосходит диаметр шара. На какой широте совершалось это путешествие?

4. Найдите наибольшее значение выражения

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\right)$$

при условии $\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right) \ge \frac{\pi}{6}$.

5. Из пункта A в пункт $Б$ вниз по течению притока отправляется катер, скорость которого в стоячей воде равна v. В пункте $Б$, где приток впадает в реку, катер поворачивает к пункту $В$, расположенному вверх по течению реки. Расстояния от A до $Б$ и от $Б$ до $В$ равны. Скорости течения притока и реки равны u_1 и u_2 соответственно. На координатной плоскости $(u_1; u_2)$ укажите область, для всех точек которой время движения по маршруту $A \to Б \to В$ меньше, чем время, которое затратил бы катер на прохождение такого же расстояния в стоячей воде.

6. Даны функции

$$f(x, y) = |y| + 2|x| - 2$$