Видно, что знаменатель представим в виде разности двух величин, одна из которых постоянна, а другая зависит от r_0. Понятно, что знаменатель достигает максимума (а сила тока – минимума) тогда, когда второе слагаемое обращается в ноль, т.е. при $\tilde{r}_0 = R_0/2$. Далее ход решения аналогичен описанному раньше.

Итак, второй провод от батарейки следует подключить между 71-м и 72-м резисторами.

О.Шведов

Ф1755. *Катушка индуктивностью L подключена параллельно конденсатору емкостью C, а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью C. К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением U_0. Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.*

Сумма напряжений конденсаторов постоянна и равна напряжению батарейки U_0, поэтому в тот момент, когда заряд (напряжение) одного из них максимален, заряд другого минимален, и наоборот. В эти моменты токи зарядки (или разрядки) конденсаторов равны нулю, следовательно, и ток через катушку в эти моменты нулевой.

Обозначим заряд уединенного конденсатора Q, а соединенного параллельно с катушкой – q. Тогда можно записать уравнения

$$\frac{Q}{C} + \frac{q}{C} = U_0, \ \frac{Q^2}{2C} + \frac{q^2}{2C} = QU_0.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$Q = CU_0\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \ q = \pm\frac{CU_0}{\sqrt{2}}.$$

В числах, чуть округляя, получим максимальное значение заряда уединенного конденсатора $1{,}7CU_0$, а конденсатора, соединенного с катушкой, $0{,}7CU_0$.

Для нахождения максимального тока через катушку заметим, что в момент максимальности тока ЭДС индукции катушки обращается в ноль, параллельно подключенный конденсатор оказывается незаряженным, а второй конденсатор имеет напряжение U_0. Тогда для энергии запишем

$$\frac{LI_m^2}{2} + \frac{CU_0^2}{2} = CU_0U_0.$$

Отсюда найдем

$$I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Через большое время ток через катушку прекратится, параллельный конденсатор будет разряжен, второй конденсатор будет заряжен до напряжения батарейки. Из энергетического соотношения

$$\frac{CU_0^2}{2} + W_{\text{тепл}} = CU_0U_0$$

находим искомое количество теплоты:

$$W_{\text{тепл}} = \frac{CU_0^2}{2}.$$

З.Рафаилов

Ф1756. *Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба провода). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?*

Непосредственный расчет токов и напряжений в кабеле сильно выходит за рамки школьной программы. Но задачу можно решить, заменив кабель эквивалентной схемой, содержащей множество одинаковых звеньев (рис.1), каждое из которых состоит из катушки индуктивности и конденсатора (так сказать, порежем кабель на маленькие кусочки). Если, например, длина такого кусочка равна 1 м, то индуктивность катушки будет 1 мкГн, а емкость конденсатора составит 25 пФ, при кусочках длиной 2 м индуктивность будет 2 мкГн, а емкость составит 50 пФ. Видно, что выбор наш не вполне произволен: если взять кусок побольше, то в разных частях этого куска напряжения и токи будут иметь существенно различные фазы, и этим уже нельзя будет пренебрегать. Поэтому будем заранее считать кусочки маленькими, а в процессе решения выясним разумность нашей модели.

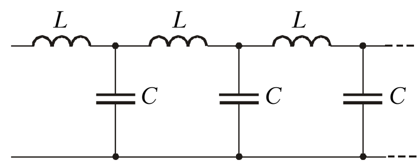

Рис.1

Итак, обозначим буквами L и C индуктивность и емкость одного звена (предполагаем эти величины малыми). В идеальном кабеле нет потерь энергии, поэтому амплитуда переменного напряжения не должна изменяться от ячейки к ячейке (как и амплитуда тока, разумеется), а частота колебаний пусть будет ω (в условии задачи упомянута «низкочастотная» волна, значит, ω должна быть малой, а в процессе решения мы посмотрим – по сравнению с чем). Разность токов соседних катушек равна току конденсатора, включенного между ними, разность напряжений между соседними конденсаторами равна напряжению на катушке, которая включена между ними (на рисунке 2 на векторных диаграммах токов и напряжений относящиеся к конденсаторам векторы нарисованы красным).

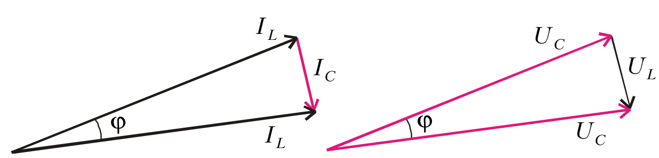

Рис.2

Треугольники токов и напряжений подобны, малые углы при вершине каждого из них равны φ, тогда для малых углов можно записать

$$I_C = I_L\varphi, \ U_L = U_C\varphi.$$

Как обычно, соотношения между токами и напряжениями для гармонических колебаний имеют вид

$$U_C = I_CX_C, \ U_L = I_LX_L,$$

где $X_C = 1/(\omega C)$ и $X_L = \omega L$. Выразим отсюда значение