

### Решения задач М1726—М1735, Ф1743—Ф1747

**М1726.** На плоскости проведено  $n$  прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения  $n$ .

**Ответ:** 2000 или 3998.

Если среди  $n$  прямых нет параллельных, то  $n = 2000$ , так как каждая прямая пересекается со всеми остальными. Если же у какой-то из  $n$  прямых есть ровно  $K$  ей параллельных, то у любой прямой другого направления тоже есть ровно  $K$  ей параллельных (иначе эти две прямые пересекались бы с неодинаковым числом других). Значит,  $n = (K + 1)S$ , где  $S$  — число различных направлений, которым параллельны прямые. Но тогда  $1999 = (K + 1)(S - 1)$ . Так как 1999 число простое, то  $K + 1 = 1999$ ,  $S = 2$ , т.е.  $n = 3998$ .

*Р. Женодаров*

**М1727.** Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема — вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.

Пусть первое число последовательности строго меньше  $\underbrace{99\dots90}_n$ . Покажем, что все члены последовательности не превосходят  $\underbrace{99\dots9}_{n+1}$ . Каждый раз к числу прибавляется не

более 9, поэтому для того, чтобы перейти через  $\underbrace{99\dots9}_{n+1}$ ,

сначала Фома должен получить число  $\underbrace{99\dots9}_n?$ , где ? — одна из цифр. Ерема может из этого числа вычесть 9, тогда (при

? < 9) снова получается число, меньшее  $\underbrace{99\dots90}_n$ . Если же

Ерема вычитает ?, то получается  $\underbrace{99\dots90}_n$ . Фома может прибавить 0, не изменив числа, или прибавить 9, получив  $\underbrace{99\dots9}_{n+1}$ . В любом случае через  $\underbrace{99\dots9}_{n+1}$  он не перейдет.

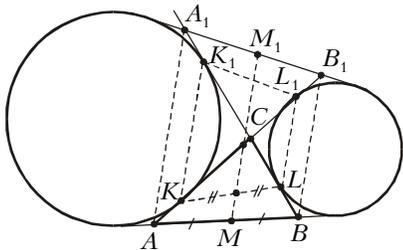
Таким образом, после того как выписано достаточно много членов последовательности (скажем,  $\underbrace{100\dots0}_{n+1} \cdot 99 + 1$ ), согласно принципу Дирихле хотя бы одно число повторится даже не 10, а по крайней мере 100 раз, так как все члены последовательности — целые числа из отрезка  $[0; \underbrace{99\dots9}_{n+1}]$ .

*А. Шаповалов*

**М1728.** Точки  $K$ ,  $L$  на сторонах  $AC$ ,  $CB$  треугольника  $ABC$  — это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины  $KL$  и  $AB$ ,

- а) делит периметр треугольника  $ABC$  пополам;  
 б) параллельна биссектрисе угла  $ACB$ .

Достроим чертеж задачи до симметричного чертежа, и соображения симметрии помогут нам ее решить (см. рисунок).



Равнобокие трапеции  $AA_1B_1B$  и  $KK_1L_1L$  обладают тем свойством, что основание  $AA_1$  параллельно основанию  $KK_1$  и отстоит от него на то же расстояние, что и  $BB_1$  от  $LL_1$ . Это следует из того известного факта (который легко проверить), что отрезки касательных  $AK$  и  $BL$  равны.

Теперь можно сказать, что средняя линия  $MM_1$  трапеции  $AA_1B_1B$  является также средней линией трапеции  $KK_1L_1L$ . Чтобы завершить доказательство, осталось сделать два замечания. Первое:  $MM_1$  делит диагональ  $AB_1$  трапеции  $AA_1B_1B$  пополам, а половина этой диагонали равна полусумме сторон  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Второе:  $MM_1$  параллельна биссектрисе угла  $ACB$ .

Л.Емельянов

**М1729.** *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.*

Для удобства изложения будем считать числа одной части красными, а другой – синими.

Докажем, что любая пара чисел вида  $(n, n + 2)$  одноцветна. Допустим противное: нашлось такое красное число  $n$ , что число  $n + 2$  синее. Тогда возьмем синее число  $m$  ( $m > n + 2$ ) такое, что число  $m + 1$  красное, а также синее число  $k$  ( $k > m$ ) такое, что число  $k + 1$  красное. В этом случае тройка красных чисел  $(n, m + 1, k + 1)$  в сумме дает красное число  $n + m + k + 2$ . Но тройка синих чисел  $(n + 2, m, k)$  в сумме дает синее число  $n + m + k + 2$ ; получено противоречие.

Теперь можно заключить, что все нечетные числа одноцветны, а также, что все четные числа одноцветны. Но все натуральные числа не являются одноцветными. Значит, нечетные числа имеют один цвет (например, красный), а четные – другой (например, синий).

Напоследок можно отметить, что в условии задачи слова «любая тройка чисел» правомерно заменить на слова «любые  $2k + 1$  чисел» – утверждение при этом останется в силе.

В.Произволов

**М1730\*.** *Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точках  $M$  и  $K$  (рис.1). Через точку  $O$  пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная  $MK$ . Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой  $O$  пополам.*

Проведем через точку  $D$  прямую  $l$  (сделайте чертеж самостоятельно), параллельную  $KM$ ; пусть  $E$  и  $F$  – точки пересечения  $l$  с прямыми  $BC$  и  $BA$  соответствен-

но. Пусть для определенности прямая, проходящая через  $O$  параллельно  $KM$  и  $l$ , пересекает стороны  $AB$  и  $CD$  четырехугольника. В этом случае для решения задачи надо доказать, что точка  $O$  лежит на медиане  $KL$  треугольника  $DKF$ . Мы докажем, что  $O$  – точка пересечения медиан  $KL$  и  $MN$  треугольников  $DKF$  и  $DME$  соответственно.

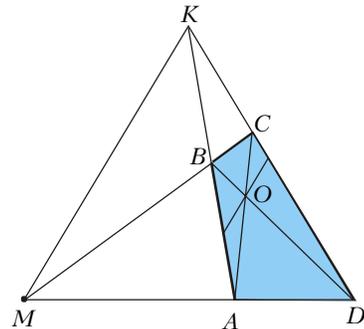


Рис.1

Обозначим точку пересечения медиан  $KL$  и  $MN$  через  $X$ . Докажем вначале, что  $X$  лежит на  $BD$ , т.е. что прямые  $DX$  и  $BD$  совпадают. Для этого докажем, что они делят отрезок  $KM$  в одном и том же отношении.

Пусть  $Y$  – точка пересечения  $DX$  и  $KM$ . Имеем:  $KY/LD = XY/DX$  (поскольку треугольники  $XYK$  и  $XDL$  подобны),  $MY/DN = XY/DX$ . Поэтому  $KY/MY = LD/DN$ . Аналогично доказывается, что  $BD$  делит  $KM$  в отношении  $FD/DE$ . Но  $FD = 2LD$ ,  $DE = 2DN$ .

Осталось доказать, что  $X$  лежит на отрезке  $AC$ . Другими словами, что  $KL$  и  $MN$  делят отрезок  $AC$  в одном и том же отношении.

**Лемма 1.**  $VS/BV = AS/AC$ , где  $S$  – точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ ,  $V$  – точка пересечения прямой  $BS$  с медианой  $AN$  этого треугольника.

**Доказательство.** Рассмотрим точку  $T$  отрезка  $BC$  такую, что  $ST \parallel AN$ . Из теоремы Фалеса следует, что  $VS/BV = NT/BN = NT/NC = AS/AC$ .

**Лемма 2.**  $VS/UV = (AS/AU)(AB/AC)$ , где  $U$  и  $S$  – точки на сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно, а  $V$  – точка пересечения прямой  $US$  с медианой  $AN$  этого треугольника.

**Доказательство.** На стороне  $AC$  возьмем точку  $Z$  такую, что  $UZ \parallel BC$ . По лемме 1 имеем  $VS/UV = AS/AZ$ , а по теореме Фалеса  $AC/AB = AZ/AU$ . Осталось перемножить эти равенства.

Доказанные утверждения позволяют завершить решение задачи. Именно, по лемме 2 медиана  $KL$  делит отрезок  $AC$  (считая от  $C$ ) в отношении  $m = (CK/KD)(KF/AK)$ , а медиана  $MN$  – в отношении  $n = (MC/ME)(MD/MA)$ . Но  $MC/ME = KC/KD$ ,  $KF/AK = MD/MA$ . Следовательно,  $m = n$ .

Утверждение задачи доказано.

*Замечание.* Вот еще одно, более естественное, хотя и несколько более сложное, доказательство леммы 2. Проведем через  $V$  параллельные  $AS$  и  $AU$  прямые (рис.2). Имеем:  $x/y = AS/AB$  (это – характеристическое свойство точек медианы!). Теорема Фалеса дает:  $VS/y = US/AU$ ,  $x/UV = AS/US$ . Перемножая эти два равенства, получаем  $VS/UV = (AS/AU)(y/x) = (AS/AU)(AB/AC)$ . Лемма доказана.

Рис.2

М.Волчкевич, В.Сендеров

**M1731.** Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.

Разобьем полученное число на 10 шестерок цифр. Второй может легко сделать так, чтобы в каждой шестерке первые три цифры совпадали с последними (*abcabc*). Полученное число будет делиться на 1001 и, следовательно, на 13.

*Н.Васильев, Б.Гинзбург*

**M1732.** а) Множества *A* и *B* на прямой содержат по *n* точек. Если все троеточия из множества *A* занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества *B* можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из *A* и *B*, имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества *A* и *B* равны.

б\*) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?

а) Нужно доказать, что множества *A* и *B* равны или, как еще говорят, изометричны. Сначала отметим, что список расстояний между всевозможными парами точек из множества *A*, в котором  $\frac{n(n+1)}{2}$  чисел, совпадает с подобным списком для множества *B* – это непосредственно вытекает из условия задачи. Отсюда можно заключить, что диаметры множеств *A* и *B* равны. Поэтому множества *A* и *B* можно разместить на одном отрезке *I*, концы которого принадлежат как *A*, так и *B*.

Теперь нужно доказать, что множества *A* и *B* либо совпали, либо симметричны относительно точки *Q*, которая является серединой отрезка *I*.

Рассмотрим возможное взаиморасположение точек множества *A* и множества *B* на отрезке *I* с концами  $\alpha$  и  $\beta$ . Если точка  $\gamma \in A$ , то либо  $\gamma \in B$ , либо точка, симметричная точке  $\gamma$  относительно *Q*, принадлежит *B*, так как по условию для троеточия  $(\alpha, \beta, \gamma)$  из множества *A* в множестве *B* имеется равное троеточие. Если две точки  $\gamma$  и  $\delta$ , симметричные относительно *Q*, принадлежат множеству *A*, то обе они принадлежат и множеству *B*.

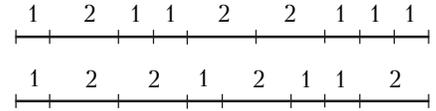
Обозначим  $C = A \cup B$ , в множестве *C* выделим максимальное подмножество  $C_1$ , симметричное относительно точки *Q*. Тогда  $C = C_0 \cup C_1$ . Заметим, что множество  $A_1 = A - C$  и  $B_1 = B - C$  не пересекаются и симметричны относительно точки *Q*. Если множество  $A_1$  (а значит и  $B_1$ ) пусто, то *A* совпадает с *B*. Если множество  $C_0$  пусто, то *A* симметрично *B* относительно *Q*. Ввиду этого достаточно убедиться, что хотя бы одно из двух множеств  $C_0$  и  $A_1$  обязательно является пустым.

Допустим противное: ни  $C_0$ , ни  $A_1$  пустыми не являются. Из определений этих множеств и проведенного анализа следует, что полный список (с учетом кратностей) расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит  $C_0$ , а другая  $A_1$ , совпадает с полным списком расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит  $C_0$ , а другая  $B_1$  (обдумайте детально это умозаключение!).

Но максимальное расстояние между точками множества  $C_0$  и точками множества  $A_1$  не равно максимальному расстоянию между точками  $C_0$  и точками  $B_1$ ! Чтобы в этом удостовериться, каждое из названных множеств удобно и достаточно представить двумя точками: крайней левой и крайней правой. При этом нужно вспомнить, что  $A_1$  и  $B_1$

симметричны относительно точки *Q*, а  $C_0$  – строго асимметрично относительно *Q*.

Значит, противоречие получено, и утверждение доказано. б) Не сохранит. Приведем пример двух множеств *A* и *B*, каждое из которых состоит из 9 точек. При этом полный список расстояний между точками *A* (из 36 чисел) совпадает с аналогичным списком множества *B*, но эти множества не равны (не изометричны). Множество *A* задается словом *abaabbab*, множество *B* – словом *abbabaab* (буква в слове – расстояние между соседними точками множества). При  $a = 1$  и  $b = 2$  множества *A* и *B* представлены на рисунке.



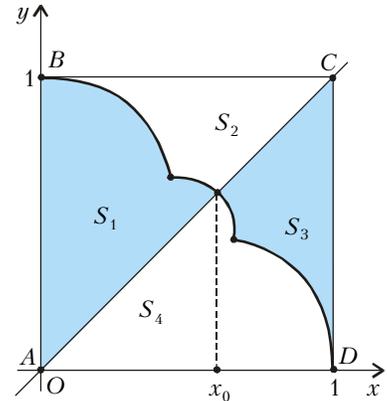
Остается открытым вопрос: изменится ли ответ этого пункта, если все расстояния в множестве *A* считать различными?

*В.Произволов*

**M1733.** Непрерывная функция  $f(x)$  такова, что  $f = f^{-1}$  и  $f(0) = 1$ . Докажите равенство

$$\int_0^1 |x - f(x)| dx = \frac{1}{2}.$$

График функции  $y = f(x)$  симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла  $y = x$  (см. рисунок). Значит,  $S_1 = S_4$ , а  $S_2 = S_3$ . Поэтому можно записать



$$\begin{aligned} \int_0^1 |x - f(x)| dx &= \int_0^{x_0} (f(x) - x) dx + \int_{x_0}^1 (x - f(x)) dx = \\ &= S_1 + S_3 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*К.Каубханов*

**M1734.** Докажите, что уравнение  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta = \cos x$  на  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  не имеет решений при  $\beta \leq 3$ , но имеет единственное решение при  $\beta > 3$ .

Такие задачи обычно сводятся к исследованию функции с помощью производных. Трудность состоит в том, чтобы суметь удачно выбрать исследуемую функцию.

Исследование уравнения задачи мы начнем с очевидного замечания: при  $\beta \leq 0$  оно решений не имеет. В самом деле, поскольку  $\sin x < x$  при  $x > 0$ , то при  $\beta \leq 0$  на всем интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  выполнено неравенство  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta \geq 1$ .

Пусть  $\beta > 0$ . Заметим, что функция  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^\beta - \cos x$  обращается в ноль в тех же точках интервала  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ , что и

функция

$$f(x) = \sin x \cos^\gamma x - x,$$

где  $\gamma = -\frac{1}{\beta} < 0$ .

Изучим поведение  $f(x)$  на полуинтервале  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Имеем:

$f(0) = 0, f'(0) = 0, f(x) \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ . Далее,  $f''(x) = -\sin x \cdot \varphi(x)$ , где

$$\varphi(x) = (1 + \gamma)^2 \cos^\gamma x - \gamma(\gamma - 1) \cos^{\gamma-2} x.$$

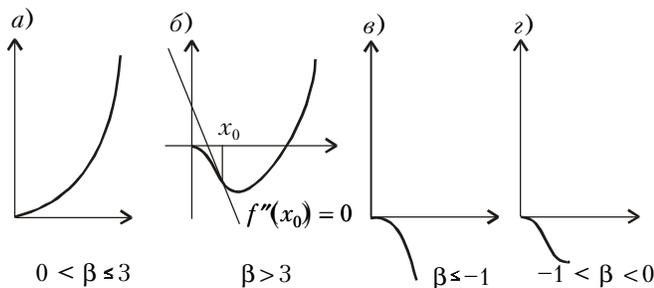
Заметим, что  $\varphi(x)$  имеет на  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  не более одного корня.

Найдем знак функции  $\varphi(x)$  в окрестности нуля. Функция  $\varphi(x)$  положительна в некоторой окрестности точки 0, если

$$\begin{aligned} \gamma(\gamma - 1) &< (1 + \gamma)^2, \\ 2\gamma + 1 &> -\gamma, \\ 1 &> -3\gamma, \beta > 3. \end{aligned}$$

Легко видеть, что при  $0 < \beta \leq 3$  на всем интервале  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  выполняется неравенство  $\varphi(x) < 0$ .

Теперь мы знаем ход изменения функции  $f(x)$  на рассматриваемом интервале (рис. а и б). Тем самым утверждение задачи доказано.



**Замечание 1.** На рисунках в и г изображены графики функции  $f(x)$  при  $\beta < 0$ ; полезно проследить за изменением вида этого графика при изменении числа  $\beta$  от 0 до  $+\infty$ , а затем от 0 до  $-\infty$ .

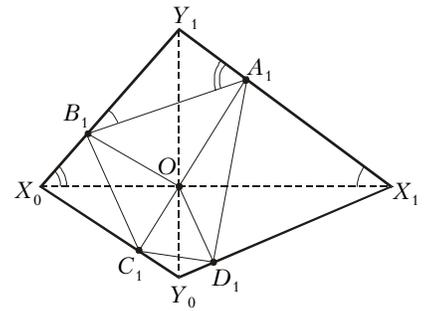
**Замечание 2.** На Всесоюзной студенческой олимпиаде 1977 года предлагалась такая задача: «Доказать неравенство  $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ».

В. Сендеров

**M1735\*.** Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.

Пусть три вершины многогранника  $X_0, Y_0$  и  $Z_0$  лежат на отрицательных полуосях, а три другие вершины  $X_1, Y_1$  и  $Z_1$  – на положительных полуосях, точка  $O$  – начало координат. Четыре проекции точки  $O$  лежат на гранях многогранника  $Z_1X_1Y_1, Z_1Y_1X_0, Z_1X_0Y_0$  и  $Z_1Y_0X_1$  – это точки  $A, B, C$  и  $D$  соответственно. Так как  $\angle Z_1AO = \angle Z_1BO = \angle Z_1CO = \angle Z_1DO = 90^\circ$ , то сфера  $S$ , построенная на  $Z_1O$  как на диаметре, содержит точки  $A, B, C$  и  $D$ .

Докажем, что точки  $A, B, C$  и  $D$  принадлежат одной окружности, т.е. сечению сферы  $S$ . Спроектировав эти точки из точки  $Z_1$  на ребра многогранника  $X_1Y_1, Y_1X_0, X_0Y_0$  и  $Y_0X_1$ , получим точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  соответственно. Эта



проекция – стереографическая, и как только мы докажем, что  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  принадлежат одной окружности, так сразу убедимся, что точки  $A, B, C$  и  $D$  тоже принадлежат одной окружности.

Заметим, что точки  $A_1, B_1, C_1$  и  $D_1$  – это проекции точки  $O$  на стороны четырехугольника  $X_1Y_1X_0Y_0$ , диагонали которого  $X_1X_0$  и  $Y_1Y_0$  перпендикулярны и пересекаются в точке  $O$  (см. рисунок). В треугольнике  $X_0Y_1X_1$  отрезок  $B_1A_1$  антипараллелен стороне  $X_0X_1$ , т.е.  $\angle Y_1B_1A_1 = \angle Y_1X_1X_0$ , а  $\angle Y_1A_1B_1 = \angle Y_1X_0X_1$ ; аналогичные равенства углов получим в треугольниках  $Y_1X_0Y_0, X_0Y_0X_1$  и  $Y_0X_1Y_1$ . После этого простой подсчет покажет, что суммы противоположных углов в четырехугольнике  $A_1B_1C_1D_1$  равны по  $180^\circ$ , т.е. около  $A_1B_1C_1D_1$  можно описать окружность. Значит, точки  $A, B, C$  и  $D$  принадлежат одной окружности, а четырехугольник  $ABCD$  является одной из шести граней многогранника  $M$ , восемь вершин которого – это восемь проекций точки  $O$  на грани исходного многогранника. Все грани многогранника  $M$  (кубоида) являются четырехугольниками, около каждого из которых можно описать окружность. Рассмотрим сферу  $Q$ , содержащую две окружности, описанные около двух смежных граней многогранника  $M$ . Нетрудно убедиться, что сфера  $Q$  содержит все вершины многогранника  $M$  (имеет место частный случай задачи M456).

В.Произволов

**Ф1743.** На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом  $45^\circ$  к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью 0,02 м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?

В верхней точке траектории камня ускорение направлено перпендикулярно скорости камня и равно (как и в остальных точках траектории) ускорению свободного падения  $g$ . Тогда

$$g = \frac{(v_0 \cos 45^\circ)^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{(v_0 \cos 45^\circ)^2}{g}.$$

При уменьшении рисунка в 10 раз радиус кривизны траектории в любой ее точке становится в 10 раз меньше, ускорение жучка всюду перпендикулярно его скорости  $\vec{u}$  (эта скорость не меняется по модулю), поэтому в интересующей нас точке траектории ускорение жучка равно

$$a = \frac{u^2}{r} = \frac{10u^2}{R} = \frac{10u^2 g}{(v_0 \cos 45^\circ)^2} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

З.Рафаилов

**Ф1744.** В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр  $d$ , а половина – диаметр  $2d$ . Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?

Содержимое сосуда очень напоминает «обычный» идеальный газ – для такого газа можно считать, что средние кинетические энергии тяжелых и легких «молекул» одинаковы. При этом скорости их движения различаются – шарики диаметром  $2d$  имеют массу в 8 раз большую, поэтому их средние квадратичные скорости в  $\sqrt{8} \approx 2,8$  раза меньше. Площадь поперечного сечения у такого шарика в 4 раза больше, чем у маленького. Теперь можно оценить частоту ударов.

Пусть шарик летит со скоростью  $v$  в течение интервала времени  $\Delta t$ . Объем, в котором находятся «стукнутые» им шарики, пропорционален площади его поперечного сечения  $S$ , скорости движения и длительности интервала времени. (Изменения направления движения при ударах для нас несущественны – шарики располагаются в сосуде хаотически, и нам безразлично, где происходят удары. Правда, это справедливо, только если длина свободного пробега существенно больше размера шариков – иначе объем «заметаемого» пространства около точки удара было бы трудно посчитать.) При малой концентрации шариков числа ударов одинаковых шариков друг о друга пропорциональны «заметаемым» объемам, т.е.  $Sv\Delta t$ . Для больших шариков такой объем получается в  $\sqrt{2}$  раз больше, чем для маленьких:  $S_6 = 4S_m$ ,  $v_6 = v_m/\sqrt{8}$ , поэтому большие шарики сталкиваются между собой чаще в  $\sqrt{2}$  раз.

А.Зильберман

**Ф1745.** В очень большом сосуде находится гелий при температуре  $T_0 = 1000$  К и давлении  $p_0 = 0,1$  Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом  $V = 1$  л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью  $S = 1$  мм<sup>2</sup>, а через время  $\tau = 0,01$  с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.

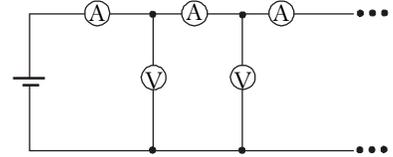
Для начала оценим длину свободного пробега молекул в большом сосуде. Концентрация молекул  $n = p/(kT) \approx 10^{19}$  1/м<sup>3</sup> (оценки будем делать грубые – точные расчеты в этой задаче получаются плохо...). Принимая диаметр молекулы гелия равным  $d = 2 \cdot 10^{-10}$  м, для длины свободного пробега получим  $\lambda = 1/(\pi d^2 n) \approx 1$  м. При такой большой величине длины свободного пробега молекулы влетают в сосуд практически не соударяясь между собой, и работа окружающего газа над влетающими порциями отсутствует. Казалось бы, энергия молекул внутри сосуда должна быть равна среднему значению снаружи, однако доля быстрых молекул среди влетающих в сосуд заметно выше, чем снаружи, – быстрые молекулы за заданное время влетают в сосуд с больших расстояний, чем медленные. Расчет тут провести не про-

сто – нужно учитывать долю молекул с определенными скоростями (распределение молекул по скоростям). Можно сделать такую, например, грубую оценку: будем считать, что влетают в сосуд молекулы со средними энергиями, но быстрые молекулы их «подгоняют». Оценим давление только быстрых молекул как половину полного давления (строго говоря, их вклад выше, но доля быстрых молекул в общем числе невелика). Тогда «добавка» к средней энергии вошедшего в сосуд объема  $V$  молекул составит  $0,5pV = 0,5vRT$ , т.е. можно сказать, что энергия возрастет в  $4/3$  раза. Это означает, что температура газа в сосуде окажется в это же число раз больше (самое забавное, что аккуратная оценка дает тот же результат!) и составит  $T \approx 1333$  К.

Число влетевших молекул можно оценивать любым способом – через переданный импульс, просто кинематически и т.п., получится примерно  $10^{14}$  молекул. При этом давление в сосуде окажется порядка 0,001 Па. Это существенно меньше давления снаружи, так что обратным потоком молекул из внутреннего сосуда наружу можно пренебречь.

Р.Александров

**Ф1746.** К батарее напряжением  $U = 1,5$  В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров (см. рисунок). Каждый из амперметров имеет сопротивление  $r = 1$  Ом, сопротивление каждого вольтметра  $R = 10$  кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.



Для начала находим обычным способом сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_{\text{общ}} = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR} = 100,5 \text{ Ом.}$$

Тогда ток первого амперметра равен

$$I_1 = \frac{U}{R_{\text{общ}}} = 14,9 \text{ мА.}$$

Первый амперметр с оставшейся частью схемы образует так называемый делитель напряжения: сопротивление «оставшейся» части составляет  $R_{\text{общ}} - r = 99,5$  Ом, тогда после первого звена к остальной цепи будет приложено напряжение  $U \cdot 99,5/100,5 = 0,99U$ . Следовательно, второй амперметр покажет

$$I_2 = 0,99I_1 = 14,8 \text{ мА.}$$

Сумму показаний всех амперметров можно найти совсем простым способом. Действительно, сумма напряжений амперметров равна напряжению батарейки, т.е. 1,5 В, ток амперметра определяется отношением его напряжения к его сопротивлению, тогда сумма токов равна

$$I_{\text{общ}} = \frac{1,5 \text{ В}}{1 \text{ Ом}} = 1,5 \text{ А.}$$

Сумму напряжений всех вольтметров можно найти таким

же способом, но можно и проще – сумма токов всех вольтметров равна току первого амперметра, тогда сумма напряжений равна

$$U_{\text{общ}} = I_1 R = 149 \text{ В.}$$

*А. Приборов*

**Ф1747.** *Катушка индуктивности подключена параллельно конденсатору, и они присоединены к источнику переменного напряжения. Измеренный в цепи источника ток равен  $I_1 = 1 \text{ А}$ , ток через конденсатор при этом составляет  $I_2 = 0,8 \text{ А}$ . Во сколько раз нужно изменить частоту источника, чтобы наступил резонанс?*

Токи соединенных параллельно катушки индуктивности и конденсатора противофазны; следовательно, ток внешней цепи равен разности токов катушки и конденсатора. Тогда ток катушки составляет 1,8 А. Для наступления резонанса частоту источника нужно изменить так, чтобы ток катушки стал меньше, а ток конденсатора больше и чтобы в итоге эти токи сравнялись. Ясно, что для этого частоту следует увеличить в

$$k = \sqrt{1,8/0,8} = 1,5 \text{ раза.}$$

*З. Катушкин*