

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 марта 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1751» или «Ф1758». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи Ф1758 – Ф1760 предлагались на XXXIV Всероссийской физической олимпиаде.

## Задачи М1751–М1755, Ф1758 – Ф1762

**М1751.** Между двумя странами установлено авиационное сообщение. Каждый город одной страны связан беспересадочными рейсами ровно с  $k$  городами другой, причем из любого города этих стран можно перелететь в любой другой, возможно с пересадками. (Города одной страны рейсы этой авиакомпании не соединяют.) Из-за финансового кризиса пришлось закрыть один рейс. Докажите, что теперь по-прежнему из любого города можно долететь в любой другой.

О.Мельников

**М1752.** Сколькими способами можно расставить восемь

ладей на черных полях шахматной доски так, чтобы они не били друг друга?

В.Произволов

**М1753.** Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается его сторон в точках  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ , точка  $L$  – середина отрезка  $A'B'$  (рис.1). Докажите, что угол  $ALB$  – тупой.

А.Заславский

**М1754\*.** Каждое число натурального ряда

окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдется бесконечная возрастающая последовательность черных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  такая, что последо-

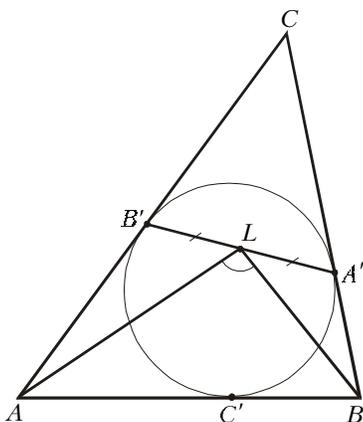


Рис.1

вательность

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots, a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}, \dots$$

одноцветна.

В.Васильева, И.Протасов

**М1755\*.** Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

В.Произволов

**Ф1758.** Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через  $t_1 = 1,2$  с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап kota и через  $t_2 = 1,0$  с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.2). На каком расстоянии  $s$  от мышей находился кот Леопольд?

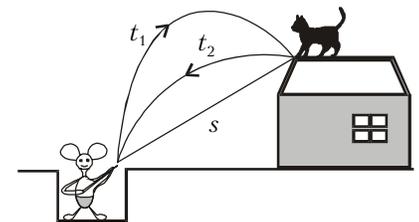


Рис.2

Д.Александров, В.Слободянин

**Ф1759.** Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен  $L$  (рис.3). Масса локомотива  $m$ , а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса

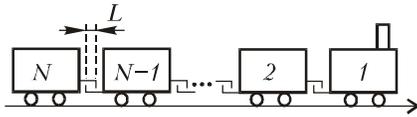


Рис.3

каждого из них тоже  $m$ .  
1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной  $F$ , найдите время, за которое в движение будет вовлечено  $N$  вагонов.

2) Полагая, что состав очень длинный ( $N \rightarrow \infty$ ), определите предельную скорость  $v_\infty$  локомотива.

*П.Бойко, Ю.Полянский*

**Ф1760.** К двум точкам  $A$  и  $B$ , находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние  $2a$ , прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной  $2l$  (рис.4).

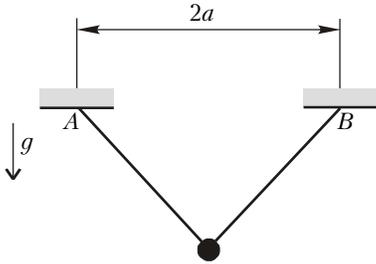


Рис.4

По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения  $g$ .

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки  $\omega_\perp$  в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки  $\omega_\parallel$  в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

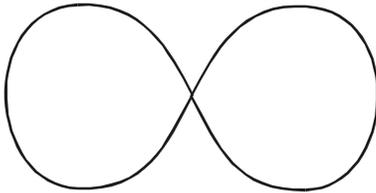


Рис.5

3) При каком отношении  $l/a$  траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 5?

*Примечание:* при

решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$$

при  $x \ll 1$ .

*В.Пестун*

**Ф1761.** Высокий вертикальный сосуд с площадью дна  $10 \text{ см}^2$  и высотой  $1 \text{ м}$  содержит под поршнем массой  $2 \text{ кг}$  сухой воздух и три одинаковые маленькие ампулы с водой.

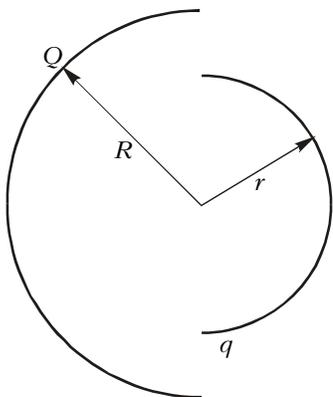


Рис.6

Температура воздуха снаружи  $+100^\circ\text{C}$ , атмосферное давление нормальное. Вначале поршень висит на высоте  $20 \text{ см}$  над дном сосуда, а после того, как одна из ампул лопнула, он поднялся и окончательно остановился на высоте  $40 \text{ см}$ . Сколько воды было в ампуле? Выскочит ли поршень из сосуда, если лопнут остальные две ампулы?

*А.Зильберман*

**Ф1762.** Найдите силу взаимодействия двух непроводящих полусфер радиусами  $R$  и  $r$  с зарядами  $Q$  и  $q$  соответственно, распределенными равномерно по поверхностям полусфер (рис.6). Центры и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.

*Г.Григорян*