

4. Пусть m и n – натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n-2m}$, если известно, что она сократима?

5. Даны два отрезка m и s . С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник, для которого s – длина гипотенузы, m – сумма длин катетов.

6. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума занимала вода в конце месяца?

7. Решите уравнение

$$|2x + 5| = \sqrt{x + 3} + 1.$$

8. Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов, сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8% до 97,6%. Каково наименьшее возможное число студентов в группе?

9. В равнобедренном треугольнике ABC основание AB является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны AC и CB в точках D и E соответственно. Найдите периметр треугольника ABC , если $AD = 2$, $AE = \frac{8}{3}$.

10. Найдите все значения параметра a , при которых ровно один корень уравнения

$$x^2 + 2(a-1)x + 3a + 1 = 0$$

удовлетворяет неравенству $x < -1$.

11. Решите неравенство

$$\frac{16 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{6 - x} \geq 1.$$

12. Решите систему

$$\begin{cases} 2\operatorname{tg}^4 2x + 6\cos^2 y = 5, \\ \frac{2}{\cos^2 2x} + 4\sin y = 1. \end{cases}$$

13. В ромбе $ABCD$ из вершины B на сторону AD опущен перпендикуляр BE . Найдите углы ромба, если $2\sqrt{3}CE = \sqrt{7}AC$.

14. Найдите все значения параметра a , при которых функция

$$y = x - \cos 2x + a \cos 6x - 7ax$$

строго убывает на всей числовой оси.

Вступительное задание по физике

1. Пловец переплывает реку, имеющую ширину $h = 54$ м. Под каким углом φ к направлению течения он

должен плыть, чтобы переправиться на противоположный берег в кратчайшее время? На какое расстояние s в этом случае течение снесет пловца вдоль берега, если скорость течения реки $u = 5$ км/ч, а скорость пловца относительно воды $v = 1$ м/с?

2. Пешеход треть всего пути бежал со скоростью $v_1 = 9$ км/ч, треть всего времени шел со скоростью $v_2 = 4$ км/ч, а оставшуюся часть шел со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Найдите эту скорость.

3. Однородное тело массой $M = 5$ кг плавает на поверхности воды, погружившись на половину своего объема. Найдите объем тела.

4. Гирию, подвешенную к динамометру, опускают в воду до тех пор, пока уровень воды в сосуде с вертикальными стенками не поднимается на $\Delta h = 5$ см. Показание динамометра при этом изменяется на $\Delta F = 0,5$ Н. Определите площадь дна сосуда. Плотность воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м³.

5. Взвешивание металлической трубы было произведено при помощи динамометра с предельной нагрузкой 100 Н. В результате взвешивания масса трубы оказалась равной 30 кг. Каким образом (предложите способ) было произведено взвешивание?

6. В электрическом чайнике вода нагревается от 20 °С до кипения за 10 мин. За какое время после этого 20% воды выкипит? Удельная теплоемкость воды $c = 4,2$ кДж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды $L = 2300$ кДж/кг. Теплоемкость чайника и теплообмен с окружающей средой не учитывать.

7. В теплоизолированный сосуд с нагревателем постоянной мощности внутри помещены $m_1 = 1$ кг льда и $m_2 = 1$ кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при температуре $t_1 = -40$ °С. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 1. Удельная теплоемкость льда $c_1 = 2$ кДж/(кг·К), твердого вещества $c_2 = 1$ кДж/(кг·К). Найдите удельную теплоту плавления вещества λ и его удельную теплоемкость c_2 в расплавленном состоянии.

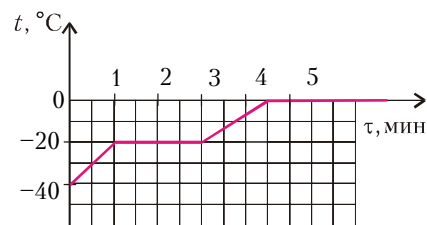


Рис. 1

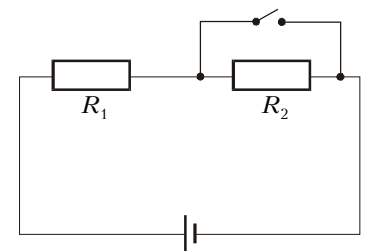


Рис. 2

8. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяемая в цепи (рис.2), если замкнуть ключ при условии, что $R_1 = 2R_2$? Напряжение источника постоянно.

9. Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и погружается в воду на расстоянии $L = 3$ м по горизонтали от края вышки через время $t = 2$ с. Определите скорость спортсмена в момент прыжка. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Автомобили на автодроме испытываются на скорости $v = 120$ км/ч.

Рис. 3

Под каким углом α к горизонту (рис.3) должно быть наклонено полотно дороги с радиусом закругления $R = 110$ м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу?

11. Два одинаковых пластилиновых шарика массой m каждый начинают движение одновременно. Первый бросают вертикально вверх со скоростью v_0 с поверхности земли, а второй падает с высоты h без начальной скорости, как показано на рисунке 4. В воздухе происходит абсолютно неупругое соударение шариков. С какой скоростью упадет на землю комок пластилина, образовавшийся при ударе? Какое количество теплоты выделится при соударении шариков? Сопротивлением воздуха пренебречь.

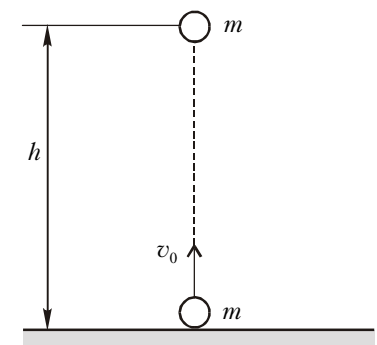


Рис. 4