Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №5 – 2000» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1741» или «Ф1748». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1743–М1745 предлагались на XXVI Всероссийской математической олимпиаде.

Задачи Ф1750–Ф1754 и Ф1757 предлагались на Московской физической олимпиаде этого года.

Задачи М1741—М1750, Ф1748 — Ф1757

М1741. С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем *характеристикой* исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. Таблица размером $n \times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.

В.Произволов

М1743. Найдите сумму

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

А.Голованов

М1744*. На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.

В.Дольников

М1745. В некоторых клетках доски $2n \times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.

С.Берлов

М1746. На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.

В.Произволов

М1747*. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB', CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат на прямых AA', BB', CC'.

А.Заславский

М1748. На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску *неразделимой*, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.

Г.Челноков

М1749. Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему.

(Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБАБААБАБА…, начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = n + a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, … (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ…

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.

Л.Коганов

М1750. а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что найдется бумажный квадрат, который целиком оклеил какую-либо грань куба.

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли найдется бумажный треугольник, который целиком оклеил какую-либо грань тетраэдра?

В.Произволов

Ф1748. На краю гладкого горизонтального стола удерживают куб массой $M = 2$ кг (рис.1). Через небольшой гладкий выступ на ребре куба переброшена длинная легкая нерастяжимая нить, к свободному концу которой привязан груз массой $M/2$. Куб отпускают. Найдите его смещение за время $\tau = 0{,}2$ с. Длина свисающего участка нити $L = 2$ м. Привязанный к стене кусок нити практически горизонтален.

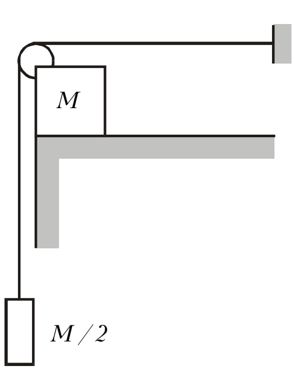

Рис.1

Р.Блоков

Ф1749. На гладком столе покоится гантелька длиной L, состоящая из невесомого жесткого стержня и маленьких одинаковых шариков массой M каждый, закрепленных на концах стержня (рис.2). В некоторый момент на гантельку начинают действовать две горизонтальные противоположно направленные силы величиной F, перпендикулярные стержню. Одна из них приложена к центру стержня, другая – к одному из шариков (силы все время остаются перпендикулярными к стержню и приложенными в упомянутых точках). Как будет двигаться стержень? За какое время стержень повернется на угол 360°? Чему будет равна сила натяжения стержня в этот момент?

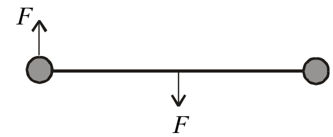

Рис.2

А.Зильберман

Ф1750. В центре днища прямоугольной баржи длиной $a = 80$ м, шириной $b = 10$ м и высотой $c = 5$ м образовалось отверстие диаметром $d = 1$ см. Оцените время, за которое баржа затонет, если не откачивать воду. Баржа открыта сверху, груза на ней нет, начальная высота бортов над уровнем воды $h = 3{,}75$ м.

С.Варламов

Ф1751. На горизонтальном столе лежит однородное кольцо массой M с насаженной на него маленькой бусинкой массой m. В начальный момент времени бусинка имеет скорость v, а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

Р.Компанеец

Ф1752. Газ с молярной массой М = 60 г/моль находится в герметичном сосуде с жесткими стенками и поддерживается при постоянной температуре $T = 0$ °С. Площадь поперечного сечения молекул, которые можно рассматривать как твердые шарики, равна $S = 10^{-19}$ м^2. Давление газа в начале эксперимента $p_0 = 100$ Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы, поглотившие квант света, переходят в возбужденное состояние. Среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-3}$ с. При столкновении двух возбужденных молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается $N = 10^{12}$ молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на $\varepsilon = 1\%$ от первоначального.

С.Варламов

Ф1753. Оцените установившийся заряд на конденсаторе емкостью 1000C в схеме, изображенной на рисунке 3.

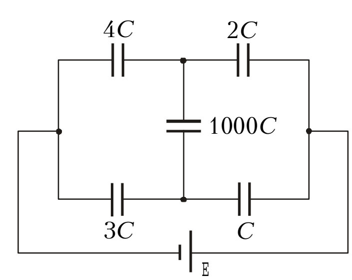

Рис.3

О.Шведов

Ф1754. Резисторы сопротивлениями R, $2R$, $3R$, …, $100R$ соединены последовательно. Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов, идущих от батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$ нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?

О.Шведов

Ф1755. Катушка индуктивностью L подключена параллельно конденсатору емкостью C, а последовательно с получившимся колебательным контуром включен еще один конденсатор емкостью C. К выводам цепочки присоединяют батарейку напряжением U_0. Найдите максимальную величину заряда каждого из конденсаторов и максимальный ток через катушку. Какое количество теплоты выделится в системе за большое время? Сопротивление соединительных проводов невелико, элементы цепи считать идеальными.

З.Рафаилов

Ф1756. Двухпроводный кабель в пластмассовой изоляции имеет емкость 25 пФ на метр длины и индуктивность 1 мкГн на метр длины (учитываются оба провода). С какой скоростью распространяется в этом кабеле низкочастотная электромагнитная волна? Какой резистор нужно включить на конце этого кабеля, чтобы не было отражений сигнала?

З.Волнов

Ф1757. Стеклянная пластинка имеет в сечении форму равнобокой трапеции (рис.4). Основание трапеции D,

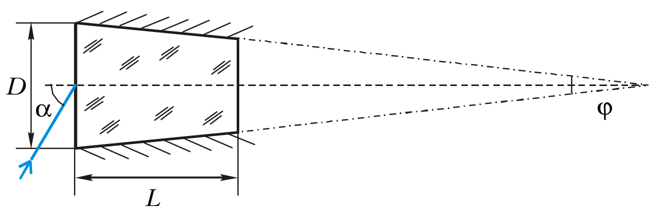

Рис.4

высота L $(D \ll L)$, а угол между боковыми сторонами $\varphi \ll 1$. Боковые поверхности пластинки посеребрены, показатель преломления стекла n. При каких углах падения α луч света, падающий на основание, будет проходить через пластинку?

Ю.Старокуров