

Конденсаторы в цепях постоянного тока

В.МОЖАЕВ

В УПРОЩЕННОМ ВИДЕ КОНДЕНСАТОР представляет собой систему двух проводников, разделенных слоем диэлектрика, толщина которого мала по сравнению с размерами проводников. Такая система проводников обладает способностью накапливать электрический заряд: на одной обкладке положительный, а на другой отрицательный, в целом же конденсатор остается электронейтральным.

Количественной характеристикой накопительной способности таких систем является емкость. Для ориентировки в величинах емкости приведем два примера: емкость уединенного проводящего шара радиусом, равным радиусу нашей планеты ($R \sim 6400$ км), составляет примерно 10^{-3} Ф, а емкость уединенного куска провода диаметром 2 мм и длиной 1 м равна приблизительно 10^{-12} Ф. (В этих примерах вторая обкладка уединенных проводников находится в бесконечности, т.е. силовые линии электрического поля уходят с данных проводников на бесконечность.)

Основное внимание в статье будет уделено поведению конденсаторов в электрических цепях с источниками постоянного тока. Помимо конденсаторов, в таких цепях обычно присутствуют и резисторы. Весь промежуток времени с момента замыкания цепи и до момента установления стационарного состояния можно разбить на три этапа.

Первый этап – это очень короткий промежуток времени (его можно оценить, разделив линейный размер схемы на скорость света) сразу после замыкания ключа. За это время в цепи установится некоторый начальный ток, но, поскольку в реальных схемах величина этого тока конечна, за бесконечно малое время во всех участках цепи протекут бесконечно малые заряды и изменением зарядов и напряже-

ний на конденсаторах можно будет пренебречь. Итак, на первом этапе, сразу после замыкания цепи, сохраняются напряжения на конденсаторах, которые были до замыкания, и устанавливаются начальные токи, величины которых определяются законом Ома для замкнутых цепей и не зависят от емкостей конденсаторов.

На втором этапе идет переходный процесс – выход на стационарный режим, во время которого в участках цепи текут переменные токи и происходит разрядка или подзарядка конденсаторов. Этот процесс характеризуется так называемой постоянной времени τ . Смысл ее в следующем: если время, прошедшее после замыкания цепи, много меньше τ , можно считать, что переходный процесс и не начинался, а если время много больше τ , то переходный процесс закончился и установился стационарный режим.

Как в первом, так и во втором процессах через конденсаторы текут переменные токи, но в первом случае это очень быстро изменяющиеся токи и поэтому реактивные сопротивления конденсаторов практически равны нулю, а во втором случае скорости изменения тока существенно меньше и зависят как от омического сопротивления цепи, так и от ее емкости. (Более подробно этот этап будет разобран ниже на конкретных примерах.)

И наконец, третий (и последний) этап, когда устанавливается стационарный режим. Здесь реактивные сопротивления конденсаторов равны бесконечности, токи через конденсаторы равны нулю, напряжения на конденсаторах равны установившимся значениям, которые определяются законом Ома для замкнутой цепи.

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а

конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через резисторы и

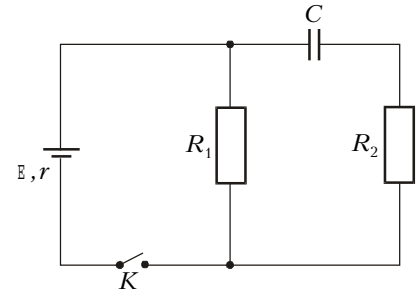


Рис. 1

через батарею сразу после замыкания ключа.

За очень малое время установления начальных токов (не путать с установившимися стационарными токами) заряд на конденсаторе не изменится и разность потенциалов на нем останется равной нулю. Эквивалентная схема для этого промежутка времени будет иметь вид, изображенный на рисунке 2. Такая схема позволяет с помощью

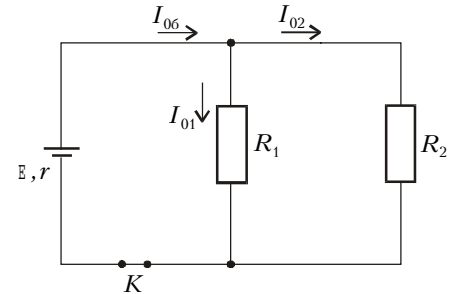


Рис. 2

закона Ома для замкнутой цепи определить начальные токи. Начальный ток через батарею составляет

$$I_{06} = \frac{E}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{(R_1 + R_2)E}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2},$$

а начальные токи через резисторы равны

$$I_{01} = \frac{R_2 E}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}$$

и

$$I_{02} = \frac{R_1 E}{r(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Следует отметить, что полученные значения начальных токов не зависят от емкости конденсатора C .

Задача 2. В электрической схеме, изображенной на рисунке 3, в началь-

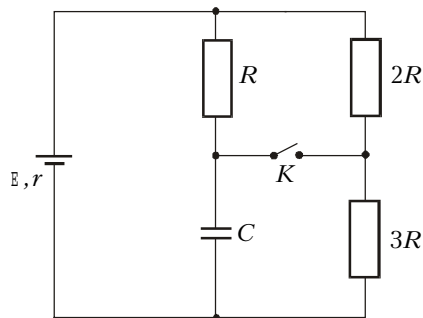


Рис. 3

ный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Определите начальные токи через ключ и через батарею сразу после замыкания ключа.

Сразу после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе остается равным нулю, поэтому начальный ток через резистор $3R$ (более точно – через резистор сопротивлением $3R$) будет равен нулю. Эквивалентная схема для этого момента времени изображена на

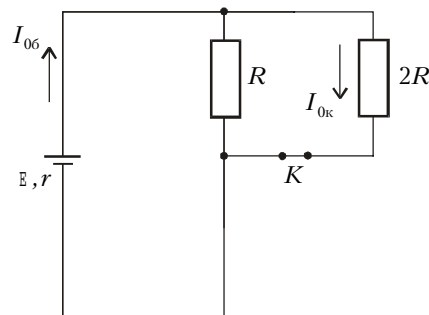


Рис. 4

рисунке 4. Начальный ток через батарею, очевидно, равен

$$I_{06} = \frac{E}{r + \frac{3E}{3r + 2R}} = \frac{3E}{3r + 2R}.$$

Такой же ток течет и через конденсатор. А начальный ток через ключ равен начальному току, протекающему через резистор $2R$:

$$I_{0к} = \frac{E}{3r + 2R}.$$

Задача 3. В электрической схеме, изображенной на рисунке 5, ключ K разомкнут, а конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_x . Параметры схемы указаны на рисунке. Определите величину U_x , при которой ток через батарею сразу после замыкания ключа останется неизменным.

До замыкания ключа через батарею

течет ток

$$I_6 = \frac{E}{r + R_1}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе остается неизменным и равным U_x . Пусть в этот

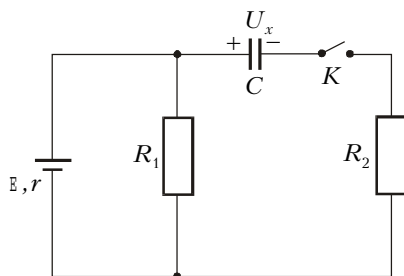


Рис. 5

момент в цепи текут токи, изображенные на рисунке 6. Запишем закон Ома для контура, охватывающего батарею

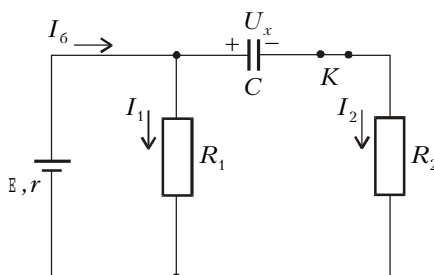


Рис. 6

и резистор R_1 :

$$E = I_1 R_1 + I_6 r.$$

Поскольку ток I_6 сохраняется, то и ток I_1 через резистор R_1 остается неизменным, значит, $I_1 = I_6$. По закону сохранения заряда, $I_6 = I_1 + I_2$, откуда следует, что $I_2 = 0$. Запишем теперь закон Ома для контура, охватывающего батарею, конденсатор и резистор R_2 :

$$E = I_6 r + U_x + I_2 R_2.$$

С учетом выражений для I_2 и I_6 получим

$$U_x = \frac{R_1 E}{r + R_1}.$$

Задача 4*. В электрической схеме, изображенной на рисунке 1, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор не заряжен. Параметры схемы указаны на рисунке. Найдите зависимость от времени тока через батарею после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь ($r = 0$).

Сразу оговоримся, что решение этой задачи выходит за рамки школьной программы, но интерес представляет не само решение, а физическая сторо-

на переходных процессах и та роль, которую выполняют конденсаторы в подобных цепях.

Рассмотрим произвольный момент времени после замыкания ключа, причем за начало отсчета времени возьмем момент окончания первого этапа – установления начальных значений токов и напряжений. Именно начиная с этого момента в цепи будет идти квазистационарный процесс.

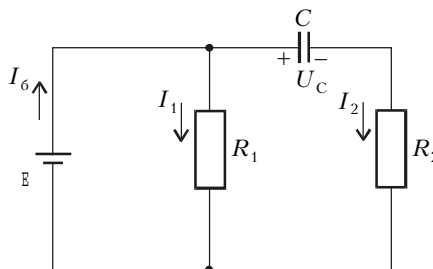


Рис. 7

Согласно рисунку 7, для произвольного момента времени можно записать:

$$E = U_C + I_2 R_2,$$

$$E = I_1 R_1,$$

$$I_6 = I_1 + I_2,$$

$$I_2 = C \frac{dU_C}{dt}.$$

Первое уравнение – это закон Ома для контура, содержащего батарею, конденсатор и резистор R_2 , второе – закон Ома для контура, охватывающего батарею и резистор R_1 , третье – закон сохранения заряда, четвертое – связь между током I_2 и изменением напряжения на конденсаторе. Продифференцировав первое уравнение по времени и решая его совместно с остальными тремя уравнениями, получим дифференциальное уравнение относительно тока через батарею:

$$\frac{dI_6}{dt} + \frac{1}{R_2 C} I_6 = \frac{E}{R_1 R_2 C}.$$

Семейство решений этого уравнения имеет вид

$$I_6(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R_1},$$

где A – произвольная константа, $\tau = R_2 C$ – постоянная времени. Константа A определяется начальным током $I_6(0)$, который мы уже находили в задаче 1. При $r = 0$ получим

$$I_6(0) = \frac{(R_1 + R_2)E}{R_1 R_2}.$$

Для данного начального тока зависимость тока через батарею от времени

запишется в виде

$$I_6(t) = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2} e^{-\frac{t}{R_2 C}} \right).$$

Постоянная времени $\tau = R_2 C$ является характерным временем данного переходного процесса. При $t \ll R_2 C$ ток через батарею практически не успевает заметно измениться, а при $t \gg R_2 C$ можно считать, что переходной процесс закончился и через батарею течет постоянный ток $I_6 = \mathcal{E}/R_1$. График зависимости $I_6(t)$ показан на рисунке 8.

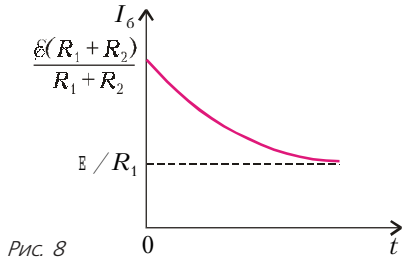


Рис. 8

На примере разобранный схемы мы рассмотрели все три процесса. До замыкания ключа ток через батарею равен нулю, сразу после замыкания ток скачком возрастает до значения $I_6(0) = (R_1 + R_2)\mathcal{E}/(R_1 R_2)$, затем по экспоненте спадает до установившегося значения $I_6(\infty) = \mathcal{E}/R_1$.

Задача 5. В схеме на рисунке 9 ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключ K_1 замыкают, оставляя K_2 разомкнутым. 1) Какие напряжения установятся

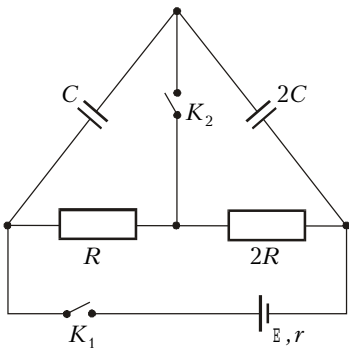


Рис. 9

на конденсаторах? 2) Какой заряд протечет через ключ K_2 , если его замкнуть (при замкнутом ключе K_1)? Параметры схемы указаны на рисунке.

1) В установившемся режиме после замыкания ключа K_1 общее напряжение на конденсаторах будет равно суммарному падению напряжения на резисторах:

$$U_{\text{общ}} = \frac{3RE}{r + 3R}.$$

Поскольку суммарная емкость конденсаторов $C_{\text{общ}} = 2C/3$, заряды на конденсаторах равны

$$q_1 = q_2 = C_{\text{общ}} U_{\text{общ}} = \frac{2RC\mathcal{E}}{r + 3R},$$

а напряжения составляют

$$U_1 = \frac{q_1}{C} = \frac{2RE}{r + 3R}$$

и

$$U_2 = \frac{q_2}{2C} = \frac{RE}{r + 3R}.$$

2) До замыкания ключа K_2 на верхней пластине конденсатора C (более точно – конденсатора емкостью C) находился заряд $-q_1$, а на верхней пластине второго конденсатора – заряд $+q_2$. После замыкания ключа K_2 и установления нового стационарного состояния напряжения на конденсаторах изменятся и будут равны

$$U'_1 = \frac{RE}{r + 3R} \text{ и } U'_2 = \frac{2RE}{r + 3R}.$$

Новый заряд на верхней пластине конденсатора C будет $q'_1 = -U'_1 C$, а на верхней пластине второго конденсатора будет заряд $q'_2 = +U'_2 \cdot 2C$. Очевидно, что через ключ K_2 протечет заряд

$$Q = (q'_1 + q'_2) - (-q_1 + q_2) = \frac{3RC\mathcal{E}}{r + 3R}.$$

Задача 6. В электрической схеме, состоящей из батареи с ЭДС $\mathcal{E} = 20$ В, резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и конденсатора, замыкают

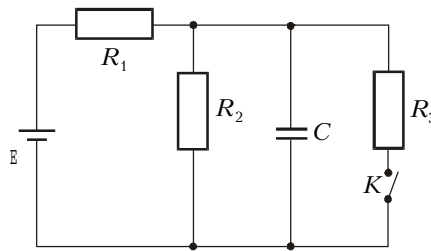


Рис. 10

ключ K (рис.10). 1) Найдите ток через резистор R_3 сразу после замыкания ключа. 2) Определите ток через батарею в тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе станет равным $3/5 \mathcal{E}$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

1) До замыкания ключа часть электрической схемы находится в стационарном режиме: через резисторы и батарею течет постоянный ток

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2},$$

конденсатор C заряжен до напря-

жения

$$U_C = IR_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = \frac{40}{3} \text{ В} \approx 13,3 \text{ В}.$$

Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется неизменным, и через резистор R_3 потечет ток (сверху вниз)

$$I_3 = \frac{U_C}{R_3} = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_3 (R_1 + R_2)} = \frac{40}{9} \text{ А} \approx 0,44 \text{ А}.$$

2) Сначала разберемся, в каком режиме будет находиться наша схема: то ли это будет переходной процесс, то ли стационарный режим. Для этого найдем установившееся напряжение на конденсаторе в стационарном режиме. Эквивалентная схема, соответствующая этому случаю, будет иметь вид, изображенный на рисунке 11. Общее

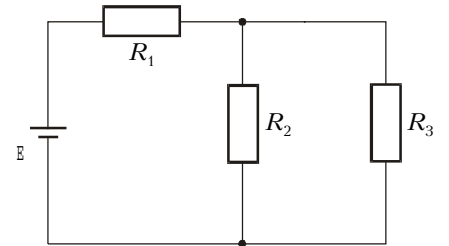


Рис. 11

сопротивление цепи равно

$$R_{\text{общ}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3},$$

через резистор R_1 течет ток

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{общ}}} = \frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}}{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3},$$

напряжение на этом резисторе равно

$$U_1 = I_1 R_1 = \frac{R_1 (R_2 + R_3) \mathcal{E}}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3},$$

а на резисторах R_2 и R_3 (такое же, как на конденсаторе) –

$$U_2 = U_3 = U_C = \mathcal{E} - U_1 = \frac{R_2 R_3 \mathcal{E}}{R_1 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{120}{11} \text{ В} \approx 11 \text{ В}.$$

Поскольку нас интересует напряжение $U_C = 3/5 \mathcal{E} = 12$ В, очевидно, что состояние системы соответствует переходному процессу. В этот момент напряжение на резисторе R_1 равно

$$U'_1 = \mathcal{E} - U_C = \frac{2}{5} \mathcal{E},$$

следовательно, через резистор R_1 и через батарею течет ток

$$I_6 = I_1 = \frac{U'_1}{R_1} = \frac{2E}{5R_1} = 0,8 \text{ А.}$$

Задача 7. Две батареи с ЭДС E_1 и E_2 включены в схему, параметры которой указаны на рисунке 12, причем

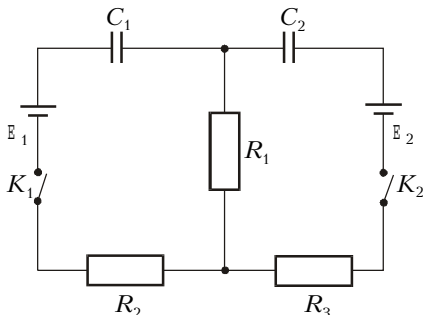


Рис. 12

$R_1 = R_2 = R_3 = R$. В начальный момент времени ключи K_1 и K_2 разомкнуты, а конденсаторы не заряжены. Ключи одновременно замыкают. 1) Найдите начальный ток через резистор R_1 . 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключей? Внутренним сопротивлением батарей пренебречь.

1) Эквивалентная схема сразу после одновременного замыкания ключей K_1 и K_2 показана на рисунке 13. Для

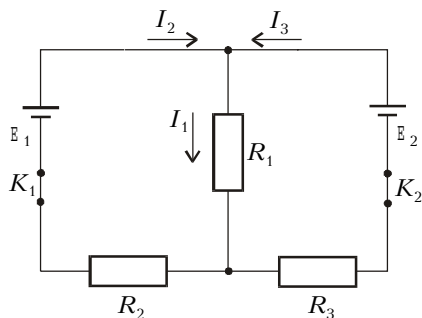


Рис. 13

определения начального тока через резистор R_1 запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} E_1 = I_1 R_1 + I_2 R_2, \\ E_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3, \\ I_1 = I_2 + I_3. \end{cases}$$

Здесь первое уравнение – это закон Ома для левого контура, второе уравнение – закон Ома для правого контура, третье уравнение – закон сохранения заряда. Совместное решение этой системы уравнений позволяет найти

ток I_1 :

$$I_1 = \frac{R_2 E_2 + R_3 E_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} = \frac{E_1 + E_2}{3R}.$$

2) После установления стационарного состояния напряжения на конденсаторах будут

$$U_{C_1} = E_1, U_{C_2} = E_2,$$

а заряды –

$$q_1 = C_1 U_{C_1} = C_1 E_1,$$

$$q_2 = C_2 U_{C_2} = C_2 E_2.$$

Работа, совершенная источниками, равна

$$A = q_1 E_1 + q_2 E_2 = C_1 E_1^2 + C_2 E_2^2.$$

Эта работа равна сумме энергии, запасенной в конденсаторах, и количества теплоты, выделившегося в резисторах. Энергии конденсаторов равны

$$W_1 = \frac{q_1^2}{2C_1} \text{ и } W_2 = \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Значит, в схеме выделяется количество теплоты

$$Q = A - (W_1 + W_2) = \frac{C_1 E_1^2 + C_2 E_2^2}{2}.$$

Упражнения

1. Какое количество теплоты выделится в схеме, изображенной на рисунке 14, после размыкания ключа K ? Параметры схемы указаны на рисунке.

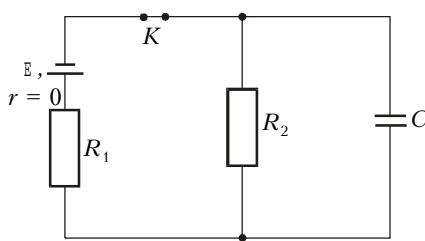


Рис. 14

2. При разомкнутом ключе K (рис.15) на конденсаторе устанавливается напряжение $U_1 = 12 \text{ В}$.

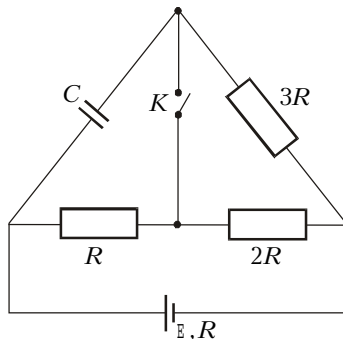


Рис. 15

- 1) Найдите ЭДС батареи.
- 2) Определите установившееся напряжение на конденсаторе после замыкания ключа.
3. В электрической схеме (рис.16), состоящей из батареи с ЭДС $E = 30 \text{ В}$,

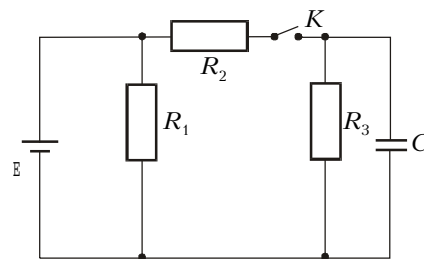


Рис. 16

резисторов с сопротивлениями $R_1 = 10 \text{ Ом}$, $R_2 = 20 \text{ Ом}$, $R_3 = 30 \text{ Ом}$ и конденсатора, замыкают ключ K .

- 1) Найдите ток через резистор R_2 сразу после замыкания ключа.
- 2) Найдите ток через батарею в тот момент времени, когда ток через резистор R_3 равен $I_3 = 0,3 \text{ А}$. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.
4. Батарея с ЭДС E и внутренним сопротивлением r включена через ключ K в схему, параметры которой указаны на рисунке 17. В начальный момент

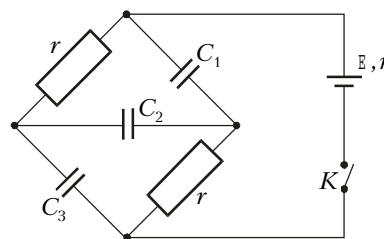


Рис. 17

времени ключ разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Ключ замыкают.

- 1) Определите начальный ток (сразу после замыкания ключа) через батарею.
- 2) Какое количество теплоты выделится во всей схеме после замыкания ключа?

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>

Vivos Voco!
<http://www.accessnet.ru/vivovoco>
 (раздел «Из номера»)