Конденсаторы в электростатическом поле

Ю.ЧЕШЕВ

В ПРИРОДЕ СУЩЕСТВУЮТ ДВА РОДА электрических зарядов: положительные и отрицательные. При этом одноименные заряды отталкиваются, а разноименные притягиваются. Сила взаимодействия точечных зарядов определяется законом Кулона.

Пространство вокруг заряда заполнено физической материей, посредством которой и осуществляется взаимодействие между зарядами. Это – электрическое поле. Его основным свойством является наличие силы, действующей на заряд, помещенный в это поле. Отношение силы, с которой поле действует на точечный заряд, к величине этого заряда называют напряженностью поля. Электрическое поле наглядно изображается с помощью силовых линий, или линий напряженности. Напомним, что силовой линией называют линию, касательная к которой в каждой точке пространства совпадает с вектором напряженности поля.

При перемещении заряда в электрическом поле совершается работа. Отношение работы поля по перемещению заряда из одной точки в другую к величине этого заряда называют разностью потенциалов.

Электростатическое поле создается только неподвижными зарядами. При решении задач по электростатике часто используются принцип суперпозиции полей и закон сохранения электрического заряда.

Задача 1. *Однородное электрическое поле слева от бесконечной заряженной плоской пластины равно $\vec{E}_1$, а справа $\vec{E}_2$ (рис.1). Определите силу, действующую на единицу площади пластины со стороны электрического поля.*

Такая ситуация возможна, если пластину, заряженную некоторым зарядом q, поместить во внешнее однородное поле $\vec{E}_0$, силовые линии которого

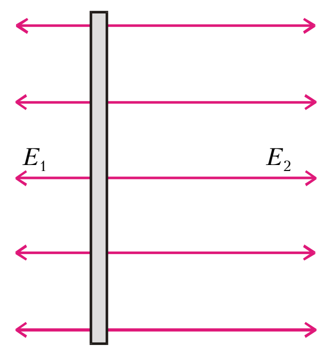

Рис. 1

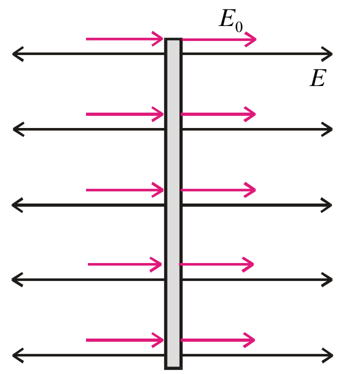

Рис. 2

перпендикулярны плоскости пластины и направлены слева направо (рис.2). Пусть $\vec{E}$ – напряженность электрического поля пластины площадью S, тогда

$$E = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, напряженность поля слева от пластины равна

$$E_1 = E - E_0,$$

а справа –

$$E_2 = E + E_0.$$

Отсюда находим E и E_0:

$$E = \frac{E_1 + E_2}{2}, \quad E_0 = \frac{E_2 - E_1}{2}.$$

Теперь определим заряд пластины:

$$q = E \cdot 2\varepsilon_0 S = \left(E_1 + E_2\right)\varepsilon_0 S$$

и силу, действующую на единичную площадь пластины со стороны внешнего поля $\vec{E}_0$:

$$f = \frac{q}{S} E_0 = \varepsilon_0 \frac{E_2^2 - E_1^2}{2}.$$

Задача 2. *Незаряженный плоский конденсатор емкостью C_1 находится во внешнем однородном электрическом поле $\vec{E}_0$ (рис.3). Силовые линии*

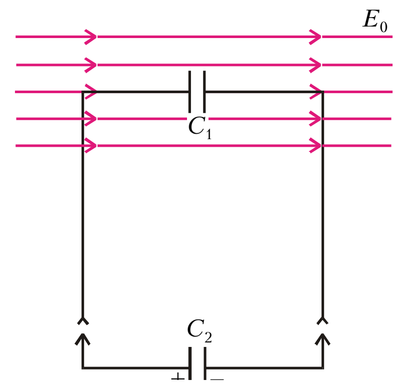

Рис. 3

электрического поля перпендикулярны пластинам конденсатора, расстояние между пластинами d. Конденсатор емкостью C_2, заряженный до разности потенциалов U_0, подключается к конденсатору емкостью C_1. Определите заряды конденсаторов после подключения. Величиной внешнего электрического поля в месте нахождения конденсатора емкостью C_2 можно пренебречь.

После соединения конденсаторов начальный заряд второго конденсатора $q_0 = C_2 U_0$ перераспределится между обоими конденсаторами так, что разности потенциалов на них уравняются. Обозначим установившиеся заряды через q_1 и q_2. По закону сохранения заряда,

$$q_1 + q_2 = C_2 U_0. \qquad (1)$$

Из принципа суперпозиции электрических полей следует, что разность потенциалов между пластинами первого конденсатора будет равна

$$\Delta\varphi_1 = E_0 d + \frac{q_1}{C_1}.$$

Между пластинами второго конденсатора установится разность потенциалов

$$\Delta\varphi_2 = \frac{q_2}{C_2}.$$

Приравняв $\Delta\varphi_1$ к $\Delta\varphi_2$, получаем

$$E_0 d + \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}. \qquad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет определить заряды q_1 и q_2:

$$q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(U_0 + E_0 d\right),$$

$$q_2 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}\left(U_0 \frac{C_2}{C_1} - E_0 d\right).$$

Задача 3. *Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор (рис.4). На пластине 1 на-*

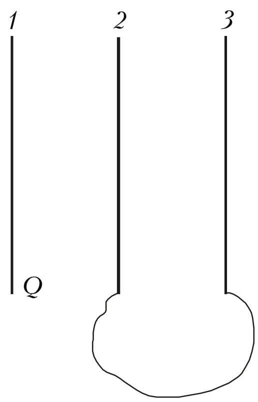

Рис. 4

ходится заряд Q, а незаряженные пластины 2 и 3 закорочены проводником. Определите силу, действующую на пластину 2. Площадь каждой пластины S.

Напряженность электрического поля пластины *1* равна

$$E_1 = \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Так как пластины *2* и *3* закорочены проводником, разность потенциалов между ними равна нулю. Следовательно, на них должны появиться заряды, электрические поля которых вместе с электрическим полем заряда Q обеспечивают эту нулевую разность потенциалов. Обозначим заряды пластин через q_2 и q_3 (рис.5). Из закона

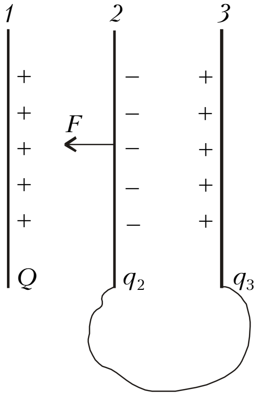

Рис. 5

сохранения заряда следует, что эти заряды равны по величине и противоположны по знаку:

$$q_2 = -q_3.$$

Из принципа суперпозиции электрических полей получаем

$$U_{23} = \left(E_1 - E_2 - E_3\right)d = 0,$$

где U_{23} – разность потенциалов между пластинами *2* и *3*, E_1, E_2 и E_3 – величины напряженностей полей, создаваемых каждой пластиной, d – расстояние между пластинами *2* и *3*. Принимая во внимание, что $E_2 = E_3$, находим

$$E_2 = E_3 = \frac{E_1}{2}.$$

Теперь легко определить заряды пластин:

$$q_2 = -q_3 = -\frac{Q}{2}.$$

Очевидно, что пластина *2* с зарядом $q_2 = -Q/2$ находится в поле пластин *1* и *3*. Следовательно сила, действующая на нее, равна

$$F = q_2\left(E_3 - E_1\right) = \frac{QE_1}{4} = \frac{Q^2}{8\varepsilon_0 S}.$$

Задача 4. *Обкладки плоского конденсатора емкостью C соединены накоротко (рис.6). Вблизи правой*

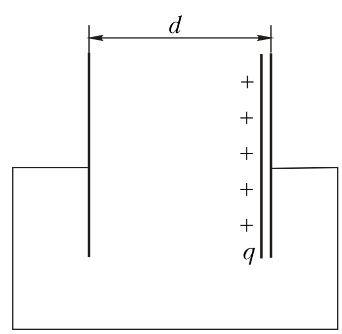

Рис. 6

обкладки находится плоская пластина с зарядом q, площадь которой равна площади обкладок конденсатора. Какую работу нужно совершить, чтобы отодвинуть пластину от правой обкладки на d/2, где d – расстояние между обкладками?

Пусть в некоторый момент времени пластина с зарядом q находится на расстоянии x от правой обкладки конденсатора (рис.7). Напряженность электрического поля, создаваемая этой пластиной, равна

$$E_0 = \frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

На обкладках конденсатора индуцируются заряды, равные по величине и

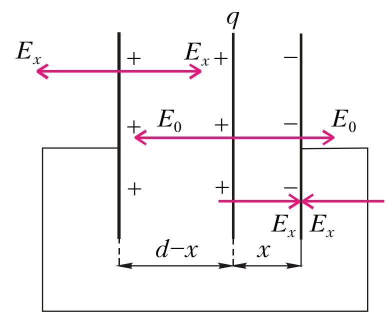

Рис. 7

противоположные по знаку – пусть заряд левой пластины положительный, а правой отрицательный. Совместно с зарядом q эти заряды обеспечивают нулевую разность потенциалов между обкладками конденсатора. Обозначим напряженности полей, соответствующие этим зарядам, через E_x. Работа электрического поля по перенесению положительного единичного заряда по замкнутому контуру равна нулю. Следовательно,

$$\left(E_0 + 2E_x\right)x + \left(2E_x - E_0\right)(d - x) = 0,$$

откуда находим напряженность электрического поля, в котором перемещается пластина:

$$2E_x = E_0\left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Сила, действующая на пластину со стороны этого поля, есть линейная

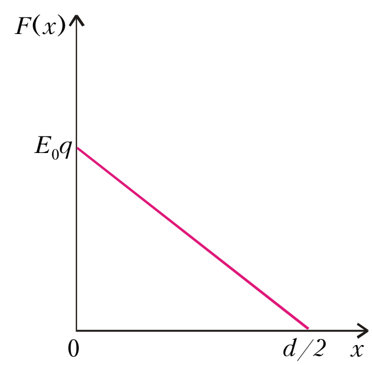

Рис. 8

функция ее перемещения x (рис.8):

$$F(x) = 2E_x q = E_0 q\left(1 - \frac{2x}{d}\right).$$

Теперь очевидно, что искомая работа равна

$$A = \frac{E_0 q}{2}\frac{d}{2} = \frac{q^2 d}{8\varepsilon_0 S} = \frac{q^2}{8C}.$$

Задача 5. *Две соединенные проводником пластины незаряженного конденсатора площадью S находятся на расстоянии d друг от друга (это расстояние мало по сравнению с размерами пластин) во внешнем одно-*

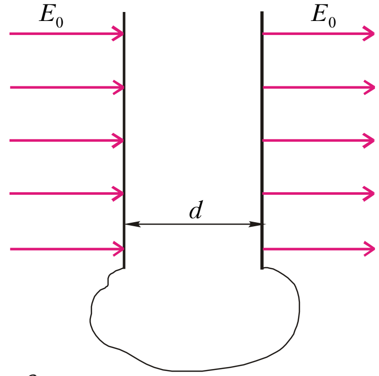

Рис. 9

родном электрическом поле, напряженность которого равна E_0 (рис.9). Какую работу нужно совершить, чтобы медленно сблизить пластины до расстояния $d/2$?

Так как пластины конденсатора замкнуты проводником, напряженность электрического поля между ними равна нулю. Пусть начальная энергия электрического поля вне конденсатора равна W_0. После того как пластины сблизились на расстояние $d/2$, в объеме $V = Sd/2$ появилось поле, энергия которого равна

$$W_1 = w\frac{Sd}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}\frac{Sd}{2},$$

где $w = \varepsilon_0 E_0^2/2$ – плотность энергии электрического поля. Тогда изменение энергии поля во всем пространстве равно

$$\Delta W = (W_1 + W_0) - W_0 = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Это увеличение энергии произошло за счет совершенной работы; таким образом, работа, которую нужно совершить, равна

$$A = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 Sd}{4}.$$

Задача 6. *Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U, расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной a и массой m (рис.10). В начальный момент пластина прижата к левой обкладке конденсатора, а затем она отпускается. Чему будет равна скорость пластины в тот момент, когда она достигнет правой обкладки конденсатора? Площадь каждой пластины S, расстояние между обкладками d.*

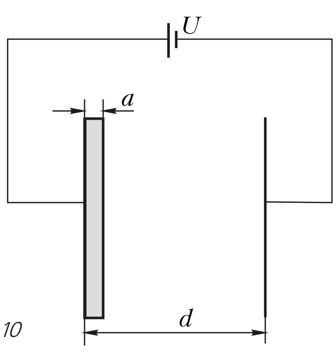

Рис. 10

Так как разность потенциалов U на конденсаторе задана, заряд пластины в начальный момент времени равен

$$q = U\frac{\varepsilon_0 S}{d - a}$$

и во время движения пластины между обкладками конденсатора будет сохраняться. В начальный момент левая обкладка конденсатора не заряжена, при этом правая обкладка конденсатора заряжена зарядом $-q$. По мере продвижения пластины заряды на обкладках будут изменяться, обеспечивая постоянство разности потенциалов между ними. Батарея зарядов не создает, следовательно, суммарный заряд обкладок конденсатора сохраняется. Найдем заряды обкладок в тот момент, когда пластина приблизится к правой обкладке. Пусть эти заряды равны Q_1 и Q_2. Тогда, по закону сохранения заряда,

$$Q_1 + Q_2 = -q.$$

Если в некоторый момент времени пластина находится на расстоянии x от левой обкладки (рис.11), то из

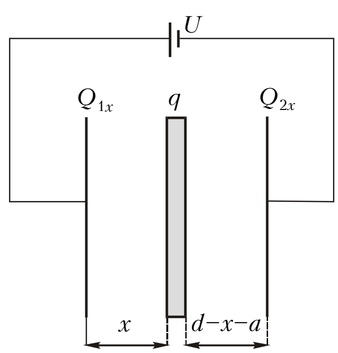

Рис. 11

постоянства разности потенциалов между обкладками получаем

$$\left(\frac{Q_{1x}}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right)x +$$

$$+\left(\frac{q}{2\varepsilon_0 S} + \frac{Q_{1x}}{2\varepsilon_0 S} - \frac{Q_{2x}}{2\varepsilon_0 S}\right)(d - x - a) = U,$$

где Q_{1x} – заряд на левой обкладке конденсатора, а Q_{2x} – на правой. Устремляя x к $(d - a)$ и учитывая связь между величинами зарядов, находим

$$Q_2 = -2q.$$

Таким образом, при достижении пластиной правой обкладки ее заряд будет $-2q$, а левой $+q$. Работа батареи $A = Uq$ идет на изменение кинетической энергии пластины. Следовательно,

$$Uq = \frac{mv^2}{2},$$

откуда скорость пластины равна

$$v = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 SU^2}{m(d - a)}}.$$

Задача 7. *Две тонкостенные металлические сферы, радиусы которых $R_1 = 20$ см и $R_2 = 40$ см, образуют сферический конденсатор (рис.12).*

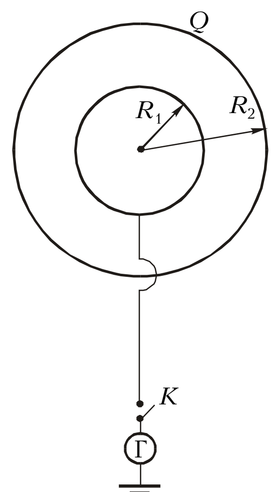

Рис. 12

На внешней сфере находится заряд $Q = 10^{-8}$ Кл. Внутренняя сфера не заряжена. Какой заряд протечет через гальванометр Г, если замкнуть ключ К?

Потенциал внешней сферы равен

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}.$$

Так как внутренняя сфера не заряжена, во всем внутреннем пространстве внешней сферы потенциал остается постоянным и равным φ_2. После того как внутреннюю сферу заземлили, ее потенциал стал равен нулю. Чтобы обеспечить нулевой потенциал внутренней сферы, требуется поместить на нее соответствующий заряд q. Согласно принципу суперпозиции,

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = 0,$$

откуда получаем

$$q = -Q\frac{R_1}{R_2} = -5 \cdot 10^{-9}\ \text{Кл}.$$

Именно этот заряд и протечет через гальванометр.

Задача 8. *В системе, изображенной на рисунке 13, радиус внутренней*

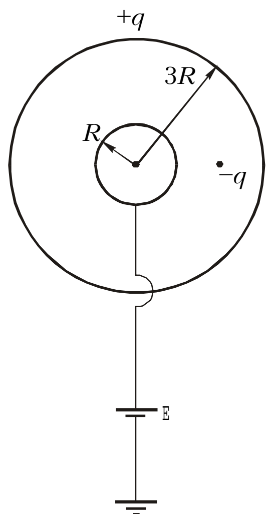

Рис. 13

проводящей сферы R, внешней (тоже проводящей) 3R, заряд внешней сферы +q. На расстоянии 2R от центра системы находится точечный заряд −q. Зная величины q, $\mathcal{E}$, *R, определите заряд внутренней сферы. Потенциал земли принять равным нулю.*

Рассмотрим вспомогательную задачу. Пусть на расстоянии $2R$ от проводящей сферы радиусом R расположен точечный заряд $-q$. Определим потенциал сферы. Заряд $-q$ приведет к перераспределению зарядов на сфере (к ее поляризации). Обозначим через σ поверхностную плотность заряда на сфере. По закону сохранения заряда,

$$\sum_i \sigma_i \Delta S_i = 0,$$

где ΔS_i – площадь i-го участка сферы, а σ_i – плотность заряда i-го участка. Тогда из принципа суперпозиции находим потенциал в центре сферы:

$$\varphi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 2R} + \sum_i \frac{\sigma_i \Delta S_i}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

При этом напряженность электрического поля внутри проводящей сферы равна нулю. Следовательно, потенциал внутри сферы постоянен и равен потенциалу на ее поверхности, т.е.

$$\varphi_R = -\frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}.$$

Теперь решение поставленной задачи очевидно. Согласно принципу суперпозиции, потенциал внутренней сферы равен

$$\mathcal{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \cdot 3R} - \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R},$$

откуда находим искомый заряд внутренней сферы:

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\mathcal{E} + \frac{1}{6}q.$$

Упражнения

1. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$, параллельно обкладкам помещена плоская пластина, имеющая заряд q. Расстояния от пластины до обкладок d_1 и d_2. Площадь пластины и обкладок S. Определите силу, действующую на пластину со стороны электрического поля.

2. Три плоские металлические пластины образуют сложный конденсатор. На средней пластине имеется заряд $+Q$, крайние незаряженные пластины закорочены проводником. Определите величину и направление напряженностей электрического поля между пластинами, если расстояния между пластинами l_1 и l_2 ($l_1 > l_2$), а площадь каждой пластины S.

3. Две соединенные проводником пластины плоского конденсатора площадью S каждая находятся на расстоянии d друг от друга во внешнем однородном электрическом поле. Расстояние между пластинами мало по сравнению с размерами пластин. Определите напряженность внешнего электрического поля, если известно, что при медленном сближении пластин до расстояния $d/3$ была совершена работа A.

4. Внутри плоского конденсатора, между обкладками которого с помощью источника напряжения поддерживается постоянная разность потенциалов U, расположена плоскопараллельная металлическая пластина толщиной l и массой m. Пластина в начальный момент прижата к левой обкладке конденсатора, а затем отпускается. Чему будет равно ускорение пластины в тот момент, когда она будет занимать симметричное положение относительно обкладок конденсатора? Площадь каждой пластины S, а расстояние между обкладками d.

5. В системе, похожей на изображенную на рисунке 13, радиус внутренней проводящей сферы R, внешней (тоже проводящей) $2R$. На расстоянии $3R$ от центра системы находится точечный заряд $-q$. Зная величины q, $\mathcal{E}$ и R, определите заряд на внешней сфере. Потенциал земли принять равным нулю.