LXIII Московская математическая олимпиада

Математический праздник

6 класс

1. В записи $*1*2*4*8*16*32*64=$ $=27$ вместо знаков «$*$» поставьте знаки «+» или «−» так, чтобы равенство стало верным.

А.Митягин

2. В квадрате 7×7 клеток закрасьте некоторые клетки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце оказалось ровно по 3 закрашенных клетки.

А.Митягин

3. Шифр кодового замка – двузначное число. Буратино забыл код, но помнит, что сумма цифр этого числа, сложенная с их произведением, равна самому числу. Напишите все возможные варианты кода, чтобы Буратино смог открыть замок.

А.Митягин, В.Клепцын

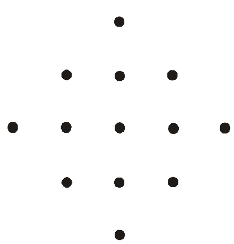

Рис. 1

4. Зачеркните все 13 точек, изображенных на рисунке 1, пятью отрезками, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя никакую линию дважды.

Фольклор

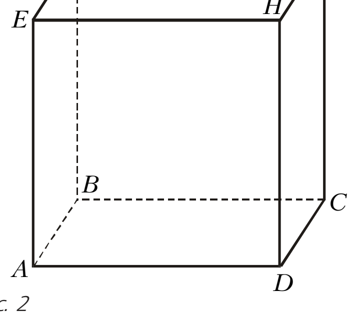

Рис. 2

5. В одной из вершин куба $ABCDEFGH$ (рис.2) сидит заяц, но охотникам он не виден. Три охотника стреляют одновременно, при этом они могут «поразить» любые три вершины куба. Если они не попадают в зайца, то до следующего залпа заяц перебегает в одну из трех соседних (по ребру) вершин куба. Укажите, как стрелять охотникам, чтобы обязательно попасть в зайца за четыре залпа.

А.Спивак

7 класс

1. См. задачу 2 для 6 класса.

2. Карлсон написал дробь $\frac{10}{97}$. Малыш может:

1) прибавлять любое натуральное число к числителю и знаменателю одновременно;

2) умножать числитель и знаменатель на одно и то же натуральное число.

Сможет ли Малыш с помощью этих действий получить дробь,

а) равную $\frac{1}{2}$; б) равную 1?

В.Клепцын

3. Дан прямоугольный треугольник (рис.3). Приложите к нему какой-нибудь треугольник (эти треугольники должны иметь общую сторону, но

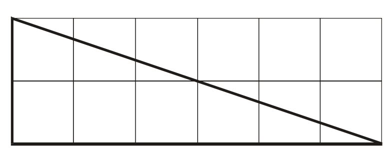

Рис. 3

не должны перекрываться даже частично) так, чтобы получился треугольник с двумя равными сторонами.

Укажите (нарисуйте!) несколько различных решений.

А.Шень

4. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел равняться произведению двух последовательных (положительных) четных чисел?

В.Произволов

5. В вершинах куба $ABCDEFGH$ (см. рис.2) расставлены натуральные числа так, что числа в соседних (по ребру) вершинах отличаются не более чем на единицу. Докажите, что найдутся две противоположные вершины (такие, как, например, A и G), числа в которых отличаются не более чем на единицу.

Г.Гальперин

Избранные задачи для старших классов

1. В выборах в 100-местный парламент участвовали 12 партий. В парламент проходят партии, за которые проголосовало строго больше 5% избирателей. Между прошедшими в парламент партиями места распределяются пропорционально числу набранных ими голосов (т.е. если одна из партий набрала в x раз больше голосов, чем другая, то и мест в парламенте она получит в x раз больше). После выборов оказалось, что каждый избиратель проголосовал ровно за одну из партий (недействительных бюллетеней, голосов «против всех» и т.п. не было) и каждая партия получила целое число мест. При этом партия любителей математики набрала 25% голосов. Какое наибольшее число мест в парламенте она могла получить? (8) [1]

И.Ященко

2. Длины оснований трапеции равны m и n (m и n – натуральные числа, $m\neq n$). Докажите, что трапецию можно разрезать на равные треугольники. (8)

А.Шаповалов

3. В треугольнике ABC длина медианы BM равна длине стороны AC. На продолжениях сторон BA и AC выбраны точки D и E соответственно так, что выполняются равенства $AD=$ $=AB$ и $CE=CM$ (рис.4). Докажите, что прямые DM и BE перпендикулярны. (8)

Р.Женодаров

4. В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вы-

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

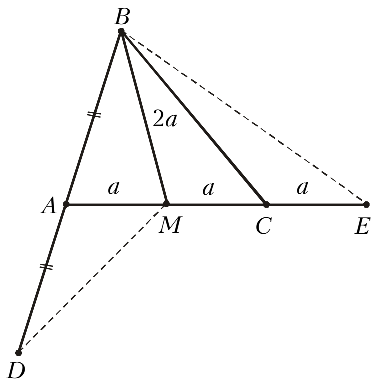

Рис. 4

нимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет ее в то же место колоды. Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя. (8)

А.Шаповалов

5. Дана окружность и точка A внутри нее. Найдите геометрическое место вершин C всевозможных прямоугольников $ABCD$, где точки B и D лежат на окружности. (9)

М.Панов

6. Гриша записал в клетки шахматной доски числа 1, 2, 3, …, 63, 64 в некотором порядке. Он сообщил Леше сумму чисел в каждом прямоугольнике из двух клеток и добавил, что 1 и 64 лежат на одной диагонали. Докажите, что по этой информации Леша может определить, в какой клетке какое число записано. (9)

А.Шаповалов

7. $ABCD$ – выпуклый четырехугольник. Окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются внешним образом в точке M, отличной от точки пересечения диагоналей четырехугольника. Окружность, проходящая через точки A, M и C, вторично пересекает прямую, соединяющую точку M и середину AB, в точке K, а окружность, проходящая через точки B, M и D, вторично пересекает ту же прямую в точке L. Докажите, что $|MK - ML| = |AB - CD|$. (9, 10)

И.Шарыгин

8. На графике функции $y = 1/x$, $x > 0$, взяты точки A и B. Из них опущены перпендикуляры на ось абсцисс, основания перпендикуляров – H_A и H_B, O – начало координат. Докажите, что площадь фигуры, ограниченной отрезками OA и OB и дугой AB, равна площади фигуры, ограниченной отрезками AH_A, BH_B, осью абсцисс и дугой AB. (10)

Р.Анно, В.Кириченко

9. Пусть

$$f(x) = x^2 + 12x + 30.$$

Решите уравнение

$$f\Big(f\Big(f\big(f(f(x))\big)\Big)\Big) = 0.$$

(10)

М.Евдокимов

10. На клетчатой бумаге нарисован выпуклый многоугольник так, что все его вершины находятся в вершинах клеток и ни одна из его сторон не идет по вертикали или горизонтали. Докажите, что вертикальные отрезки линий сетки, заключенные внутри многоугольника, имеют такую же сумму длин, как и горизонтальные. (10)

Г.Гальперин

11. Наибольший общий делитель (НОД) натуральных чисел m и n равен 1. Каково наибольшее возможное значение НОД чисел $n + 2000m$ и $m + 2000n$? (11)

С.Злобин

12. Вычислите

$$\int_0^{\pi} \left(|\sin 1999x| - |\sin 2000x|\right) dx.$$

(11)

Фольклор

13. У Феди есть три палочки. Если из них нельзя сложить треугольник, Федя укорачивает самую длинную из палочек на сумму длин двух других. Если длина палочки не обратилась в ноль и треугольник снова нельзя сложить, то Федя повторяет операцию, и т.д. Может ли этот процесс продолжаться бесконечно? (11)

А.Шаповалов

14. В круговом шахматном турнире каждый участник сыграл с каждым один раз. Назовем партию неправильной, если выигравший ее шахматист в итоге набрал очков меньше, чем проигравший. (Победа дает 1 очко, ничья – 1/2, поражение – 0.)

Могут ли неправильные партии составлять

а) более 75% общего количества партий в турнире;

б) более 70%?

(11)

С.Токарев

15. Можно ли так расположить бесконечно много равных выпуклых многогранников в слое, ограниченном двумя параллельными плоскостями, чтобы ни один многогранник нельзя было вынуть из слоя, не сдвигая остальных? (11)

А.Канель

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Можно ли разрезать круг на 7 равновеликих частей тремя прямолинейными разрезами? (9)

Н.Келин

2. Пусть $S(n)$ обозначает сумму цифр натурального числа n. Решите уравнение:

$$S\left(n^4\right) = S^4(n).$$

(9)

А.Канель

3. Четырехугольник $ABCD$ – вписанный, K – середина той дуги AD, где нет других вершин четырехугольника. Пусть X и Y – точки пересечения прямых BK и CK с диагоналями. Докажите, что XY параллельна AD. (9)

В.Доценко

4. Треугольник ABC разбит на 6 треугольников биссектрисами AD, BE, CF с точкой пересечения O. В каждый из них вписана окружность. Четыре из этих окружностей равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний. (10)

В.Сендеров

5. Раскраска вершин графа называется *правильной*, если любые две соседние вершины имеют разные цвета. Докажите, что для каждого данного графа число способов правильной раскраски в k цветов есть многочлен от k. (10)

В.Доценко

6. Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f(f(x)) = -x^2$ при любом x. Докажите, что $f(x) \le 0$ при любом x. (11)

Б.Френкин

7. Куб с ребром целочисленной длины k разбит на единичные кубики, в некоторых из них стоят ладьи (они могут ходить параллельно любому ребру куба). Расстановку ладей назовем *плотной*, если ладьи не бьют друг друга и их k^2 штук. Пусть дан куб C с ребром длины 2^n и плотная расстановка ладей в нем. В кубе C отмечена вершина A. Рассмотрим содержащиеся в C кубы с вершиной A, составленные из единичных кубиков и имеющие плотную расстановку ладей (*угловики*). Каково наибольшее возможное число угловиков? (11)

А.Канель, Г.Кондаков

8. Дана последовательность чисел: $a_0 = 1$; $a_{k+1} = a_k + S(a_k)$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n. Докажите, что для бесконечно многих k

$$S(a_k) < \lg(\lg(\lg a_k)).$$

(11)

А.Канель

9. Какое наименьшее число ребер может быть в графе с 2000 вершин, если среди любых 10 вершин хотя бы одна соединена с остальными 9? (11)

В.Сендеров

Публикацию подготовили
В.Сендеров, Б.Френкин