Неравенство Иенсена

О.ИЖБОЛДИН, Л.КУРЛЯНДЧИК

Искусством доказывать неравенства овладеть далеко не просто. Тут требуется большой опыт, интуиция, и, как в каждом искусстве, умение свободно применять различные «технические» приемы. Мы продемонстрируем один из таких приемов на ряде примеров. В этой статье будут доказаны и классические неравенства (Коши, Коши – Буняковского, Гёльдера и Минковского), и менее знаменитые, но также весьма интересные.

Мы будем записывать формулы, как правило, коротко, с помощью обозначений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Советуем тем, кто еще не научился ими пользоваться, расписывать выкладки более подробно.

Выпуклые множества

В основе доказательств неравенств, о которых будет идти речь, лежит понятие выпуклости. Это очень важное математическое понятие, и вы с ним уже встречались в школьном курсе геометрии при изучении многоугольников. Однако в математике понятие выпуклости связано не только с многоугольниками. Фигуру называют выпуклой, если с любыми двумя своими точками она содержит весь отрезок с концами в этих точках. На рисунке 1 показаны примеры выпуклых и невыпуклых фигур. Выпуклые фигуры обладают многими замечательными свойствами, но нас будет интересовать лишь одно из них. Сформулируем его:

Пусть в точках A_1, A_2, …, A_n выпуклой фигуры Ф сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n соответственно. Тогда центр масс этих точек также принадлежит фигуре Ф.

Из физики известно, что центр масс плоской фигуры – это точка с координатами

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}; \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \right), \qquad (1)$$

где x_i, y_i – координаты точки A_i.

Упражнения

1. Докажите, что центр масс двух точек лежит на отрезке, их соединяющем.

2. Докажите, что центр масс n точек лежит на отрезке, соединяющем любую из них с центром масс остальных.

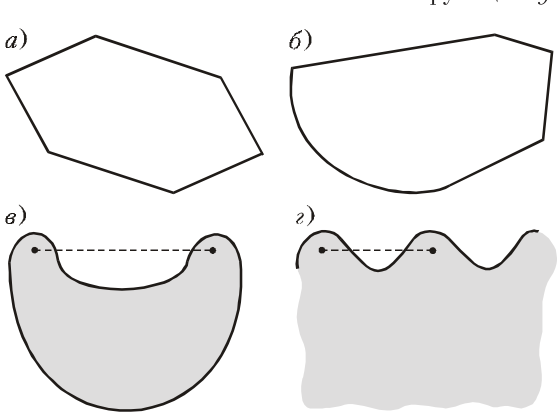

Рис.1

Выпуклые функции

Нарисуем график функции $y = x^2$ (рис.2,*а*).

Мы видим, что надграфик этой функции (на рисунке он закрашен красным цветом) является выпуклой фигурой. Если же рассмотреть функцию $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$), то ее надграфик (на рисунке 2,*б* он закрашен красным цветом) выпуклым не является. Однако выпуклым является подграфик этой функции (на том же рисунке он закрашен синим цветом).

Эти наблюдения приводят к важному определению:

Если надграфик функции является выпуклой фигурой, то говорят, что эта функция выпуклая, а если выпуклым является подграфик, то говорят, что функция вогнутая[1].

Тем самым, функция $y = x^2$ является выпуклой, а функция $y = \sin x$ ($x \in [0; \pi]$) – вогнутой.

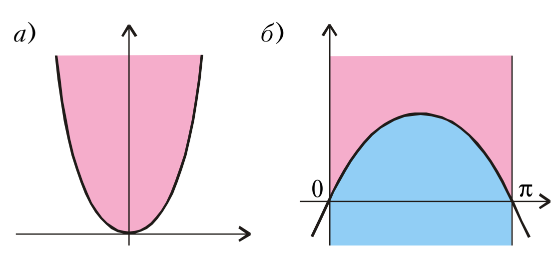

Рис.2

Основное неравенство

Среди известных классических неравенств особое место занимает неравенство Иенсена[2]. Все классические неравенства, упомянутые в начале статьи, являются его следствием.

Теорема (неравенство Иенсена). *Пусть $y = f(x)$ – функция, выпуклая на некотором интервале, x_1, x_2, …, x_n – произвольные числа из этого интервала, а α_1, α_2, …, α_n – произвольные положительные числа, сумма которых равна единице. Тогда*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \le \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n). \qquad (2)$$

Доказательство. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки A_1, A_2, …, A_n с абсциссами x_1, x_2, … …, x_n. Расположим в этих точках грузы с массами m_1, m_2, …, m_n.

Опубликовано в «Кванте» №4 за 1990 год.

[1] *В некоторых учебниках принята другая терминология.*

[2] *Иенсен Иоганн Людвиг (1859 – 1925) – датский математик.*

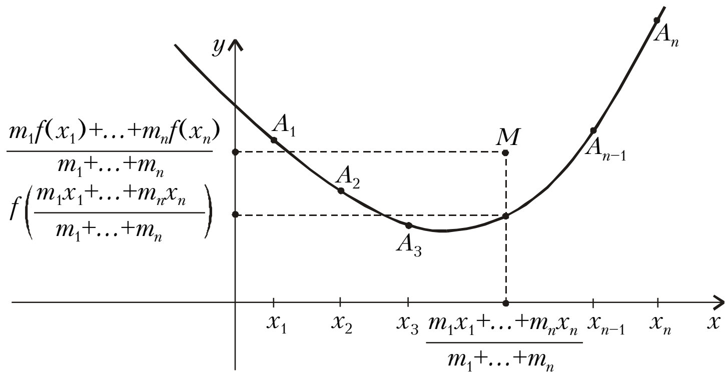

Рис.3

Центр масс этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n};\ \frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}\right).$$

Так как точки A_1, A_2, …, A_n принадлежат надграфику выпуклой функции, то и их центр масс также принадлежит надграфику (ибо надграфик – выпуклая фигура). А это означает, что ордината центра масс M не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой (рис.3), т.е.

$$f\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)\le \frac{m_1f(x_1)+\ldots+m_nf(x_n)}{m_1+\ldots+m_n}. \quad (3)$$

Для завершения доказательства остается положить $m_1=\alpha_1$, …, $m_n=\alpha_n$.

Этот пункт статьи мы хотим закончить двумя важными замечаниями. Во-первых, в процессе доказательства неравенства Иенсена (2) мы доказали неравенство (3). На самом деле эти неравенства равносильны. Положив в неравенстве (2) $\alpha_i=\frac{m_1}{m_1+\ldots+m_n}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, мы получаем неравенство (3). Поэтому естественно оба эти неравенства называть неравенствами Иенсена. Неравенство (2) выглядит более компактно, однако для приложений удобнее пользоваться неравенством (3). Во-вторых, если функция $f(x)$ вогнутая, то для нее неравенства Иенсена (2) и (3) меняются на противоположные. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть выпуклую функцию $-f(x)$.

Неравенство Коши—Буняковского

На первый взгляд, неравенство Иенсена не производит особого впечатления: слишком общо выглядит формулировка. Прочитав статью до конца, вы убедитесь, что это впечатление обманчиво.

Иллюстрация М.Сумниной

Продемонстрируем силу неравенства Иенсена на конкретном примере. А именно, докажем знаменитое неравенство Коши — Буняковского

$$\left(a_1^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\geq$$
$$\geq\left(a_1b_1+\ldots+a_nb_n\right)^2,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ – произвольные положительные числа.

Доказательство. Как мы знаем, функция $y=x^2$ – выпуклая. Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{m_1x_1+\ldots+m_nx_n}{m_1+\ldots+m_n}\right)^2\leq$$
$$\leq\frac{m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2}{m_1+\ldots+m_n}\quad(m_i>0).$$

Следовательно,

$$\left(m_1x_1^2+\ldots+m_nx_n^2\right)\left(m_1+\ldots+m_n\right)\geq$$
$$\geq\left(m_1x_1+\ldots+m_nx_n\right)^2.$$

Положив $m_i=b_i^2$, $x_i=\dfrac{a_i}{b_i}$, получим требуемое неравенство.

Упражнение 3. Докажите неравенство Коши — Буняковского для произвольных вещественных чисел a_i, b_i.

Примеры выпуклых функций

Для успешного применения неравенства Иенсена необходим простой критерий, позволяющий определять, является ли данная функция выпуклой.

Теорема. *Пусть $y=f(x)$ – дважды дифференцируемая функция. Если ее вторая производная положительна, то функция выпукла, а если вторая производная отрицательная, то функция вогнута.*

Мы не будем аккуратно доказывать эту теорему, поясним только ее геометрический смысл. Пусть $f''(x)>0$ для всех x. Очевидно, что надграфик окажется выпуклым, если график функции в каждой точке «поворачивает» вверх относительно касательной в этой точке. На языке формул это означает, что если $l(x)$ – линейная функция, график которой – касательная к графику функции $f(x)$ в точке $(a, f(a))$, то $f(x)>l(x)$ при всех x, достаточно близких к a и отличных от a.

Чтобы вывести неравенство $f(x)>l(x)$ из неравенства $f''(a)>0$, рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $g(x)$ – такая функция, что $g(a)=g'(a)=0$ и $g''(a)>0$. Тогда при всех x, достаточно близких к a и отличных от a, $g(x)>0$. Это понятно с физической точки зрения: если покоящемуся телу (скорость $g'(a)=0$) придать положительное ускорение (ускорение $g''(a)>0$), то тело начнет перемещаться в положительном направлении.

Рассмотрим теперь функцию $g(x)=f(x)-l(x)$. Поскольку графики функции $f(x)$ и $l(x)$ проходят через одну точку и имеют в ней одинаковый наклон, $g(a)=g'(a)=0$. Кроме того, $g''(x)=f''(x)$, так как вторая производная линейной функции $l(x)$ равна нулю. Значит, $g''(a)>0$ и, согласно сказанному в предыдущем абзаце, $g(x)>0$ при x, достаточно близких к a. Это и значит, что $f(x)>l(x)$. Случай $f''(x)<0$ рассматривается аналогично.

Пользуясь теоремой, мы «запасемся» несколькими выпуклыми и вогнутыми функциями. От вас при этом требуется умение вычислять производные.

Примеры

1. $y=x^\alpha$ $(x>0)$.

Так как $y''=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, то при $0<\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha<0$ и $\alpha>1$ – выпуклая.

2. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$.

Так как $y''=a^x\ln^2a>0$, то функция выпуклая.

3. $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq1)$.

Так как $y''=-\dfrac{1}{x^2\ln a}$, то при $a<1$ функция выпуклая, а при $a>1$ – вогнутая.

4. $y=\ln\left(1+e^x\right)$.

Так как $y''=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$, то эта функция выпуклая.

5. $y=x\ln x$.

Так как $y''=\dfrac{1}{x}>0$, то функция выпуклая.

6. $y=\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ $(x>0)$.

Так как $y''=(\alpha-1)x^{\alpha-2}\left(1+x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}-2}$, то при $\alpha<1$ функция вогнутая, а при $\alpha>1$ – выпуклая.

Теперь мы можем доказать несколько классических неравенств.

Неравенство Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geq\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}\quad(x_i>0).$$

Доказательство. Прологарифмируем обе части этого неравенства:

$$\ln\left(\frac{1}{n}x_1+\ldots+\frac{1}{n}x_n\right)\geq$$
$$\geq\frac{1}{n}\ln x_1+\ldots+\frac{1}{n}\ln x_n.$$

Полученное неравенство напоминает нам неравенство Иенсена, однако знак неравенства «смотрит не туда». Объясняется это тем, что функция $\ln x$ не выпуклая, а вогнутая (пример 3).

Неравенство Гёльдера

Пусть p, q – положительные числа, причем $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$
$$(a_i, b_i>0).$$

Доказательство. Ясно, что $p>1$, поэтому функция $y=x^p$ – выпуклая (пример 1). Напишем для этой функции неравенство Иенсена (3):

$$\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^p\leq\frac{\Sigma m_ix_i^p}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда

$$\Sigma m_ix_i\leq\left(\Sigma m_i\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\Sigma m_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, то $\dfrac{p-1}{p}=\dfrac{1}{q}$, и поэтому

$$\Sigma m_ix_i\leq\left(\Sigma m_ix_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\Sigma m_i\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положив теперь $m_i=b_i^q$, $x_i=a_ib_i^{1-q}$, получаем требуемое неравенство.

Неравенство Минковского

$$\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}+\sqrt[n]{b_1\cdot\ldots\cdot b_n}\leq$$
$$\leq\sqrt[n]{\left(a_1+b_1\right)\cdot\ldots\cdot\left(a_n+b_n\right)}$$
$$(a_i, b_i>0).$$

Доказательство. Поделив обе части неравенства на $\sqrt[n]{a_1\cdot\ldots\cdot a_n}$, получим

$$1+\left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}\le$$

$$\le\left(1+\frac{b_1}{a_1}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что дробь $\frac{b_i}{a_i}$ имеет смысл как-то обозначить. Но на самом деле удобнее ввести обозначение не для самой дроби $\frac{b_i}{a_i}$, а для ее логарифма: $x_i=\ln\frac{b_i}{a_i}$. Итак, заменив $\frac{b_i}{a_i}$ на e^{x_i}, мы запишем наше неравенство в виде

$$1+e^{\Sigma\frac{1}{n}x_i}\le\Pi\left(1+e^{x_i}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Прологарифмируем обе части получившегося неравенства:

$$\ln\left(1+e^{\Sigma\frac{1}{n}x_i}\right)\le\Sigma\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{x_i}\right).$$

В последнем неравенстве мы узнаем неравенство Иенсена для выпуклой функции $y=\ln\left(1+e^x\right)$ (пример 4).

Несколько примеров использования неравенства Иенсена

Задача 1. *Докажите неравенство*

$$\Pi a_i^{a_i}\ge\left(\Sigma\frac{1}{n}a_i\right)^{\Sigma a_i}\quad(a_i>0).$$

Решение. Прологарифмировав обе части неравенства и разделив на n, получим

$$\Sigma\frac{1}{n}a_i\ln a_i\ge\left(\Sigma\frac{1}{n}a_i\right)\ln\Sigma\frac{1}{n}a_i.$$

А это – неравенство Иенсена для выпуклой функции $y=x\ln x$ (пример 5).

Задача 2. *Докажите неравенство*

$$\sqrt{\left(\Sigma a_i\right)^2+\left(\Sigma b_i\right)^2}\le\Sigma\sqrt{a_i^2+b_i^2}$$

$$(a_i,b_i>0).$$

Решение. Напишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y=\sqrt{1+x^2}$ (пример (6)):

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^2}\le\frac{\Sigma m_i\sqrt{1+x_i^2}}{\Sigma m_i}.$$

Домножив обе части неравенства на Σm_i, получим

$$\sqrt{\left(\Sigma m_i\right)^2+\left(\Sigma m_ix_i\right)^2}\le\Sigma m_i\sqrt{1+x_i^2}=$$

$$=\Sigma\sqrt{m_i^2+\left(m_ix_i\right)^2}.$$

Остается только положить $m_i=a_i$, $x_i=\frac{b_i}{a_i}$.

В заключение рассмотрим довольно трудную задачу, которую тоже можно решить при помощи неравенства Иенсена.

Задача 3. *Докажите неравенство*

$$\frac{p_1}{p_2+p_3}+\frac{p_2}{p_3+p_4}+\frac{p_3}{p_4+p_5}+$$

$$+\frac{p_4}{p_5+p_1}+\frac{p_5}{p_1+p_2}\ge\frac{5}{2}\quad(p_i>0).$$

Решение. Для удобства введем дополнительные переменные p_6 и p_7, равные p_1 и p_2 соответственно. Теперь данное неравенство можно записать коротко:

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{p_i}{p_{i+1}+p_{i+2}}\ge\frac{5}{2}.$$

Выпишем неравенство Иенсена (3) для выпуклой функции $y=\frac{1}{x}$ (пример 1):

$$\left(\frac{\Sigma m_ix_i}{\Sigma m_i}\right)^{-1}\le\frac{\Sigma m_ix_i^{-1}}{\Sigma m_i}.$$

Отсюда следует, что

$$\Sigma\frac{m_i}{x_i}\ge\frac{\left(\Sigma m_i\right)^2}{\Sigma m_ix_i}.$$

Положим теперь $m_i=p_i$, $x_i=p_{i+1}+p_{i+2}$:

$$\Sigma\frac{p_i}{p_{i+1}+p_{i+2}}\ge\frac{\left(\Sigma p_i\right)^2}{\Sigma p_i\left(p_{i+1}+p_{i+2}\right)}.$$

Тем самым, достаточно доказать неравенство

$$\frac{\left(\Sigma p_i\right)^2}{\Sigma p_i\left(p_{i+1}+p_{i+2}\right)}\ge\frac{5}{2}.$$

Избавившись от знаменателей и раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$2\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge p_1p_2+p_1p_3+p_1p_4+p_1p_5+$$

$$+p_2p_3+p_2p_4+p_2p_5+p_3p_4+$$

$$+p_3p_5+p_4p_5.$$

Так как правая часть равна

$$\frac{1}{2}\left(\left(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5\right)^2-\right.$$

$$\left.-\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\right),$$

то неравенство можно переписать в виде

$$5\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge\left(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5\right)^2.$$

Записав это в виде

$$\left(1^2+1^2+1^2+1^2+1^2\right)\times$$

$$\times\left(p_1^2+p_2^2+p_3^2+p_4^2+p_5^2\right)\ge$$

$$\ge\left(1\cdot p_1+1\cdot p_2+1\cdot p_3+1\cdot p_4+1\cdot p_5\right)^2,$$

мы обнаруживаем частный случай неравенства Коши—Буняковского.

Упражнения

Докажите неравенства:

4. $\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^p<n^{p-1}\sum_{i=1}^{n}x_i^p$ при $p>1$, $x_i>0$.

5. $\sum_{i=1}^{n}a_i^p\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^p\ge n^{2-p}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^p$ при $p\ge2$, $a_i,b_i>0$.

6. $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\ge\frac{n}{n-1}$, где $s=a_1+a_2+\ldots+a_n$ и $a_i>0$.

7. $\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\ge3\sqrt{2}$ при $a,b,c>0$.

8. $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge$ $\ge4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$ при $a,b,c>0$.

9. $\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^n}\le\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1-x_i\right)\right)^n}$ при $0<x_i<\frac{1}{2}$.

10. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge2$ при $a,b,c,d>0$.

11. $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+e}+$ $+\frac{d}{e+f}+\frac{e}{f+a}+\frac{f}{a+b}\ge3$ при $a,b,c,d,e,f>0$.