Закон сохранения энергии для одноатомного идеального газа

А.ШЕРОНОВ

Во всех тепловых процессах выполняется закон сохранения энергии, или первый закон (первое начало) термодинамики, который удобно записывать в виде

$$Q = \Delta U + A .$$

Здесь Q – подведенное количество теплоты, A – совершенная термодинамической системой работа и ΔU – изменение внутренней энергии системы.

Внутренняя энергия является функцией состояния термодинамической системы и для идеального газа зависит только от его температуры T. Для одного моля одноатомного газа она равна $U = 3/2\, RT$ (где R – универсальная газовая постоянная). Любое (как бесконечно малое, так и конечное по величине) изменение внутренней энергии определяется лишь разностью температур конечного и начального состояний:

$$\Delta U = \frac{3}{2} R\Delta T$$

и не зависит от способа перехода из начального состояния в конечное. Это остается справедливым и в том случае, когда газ переводится из начального равновесного состояния в конечное равновесное состояние в результате неравновесного необратимого процесса.

Напротив, работа A, которая совершается газом за счет подведенного тепла или изменения его внутренней энергии, зависит от пути перехода между двумя равновесными состояниями. Элементарная работа ΔA в любом обратимом процессе по определению равна произведению давления p на малое изменение объема газа ΔV в двух соседних равновесных состояниях этого процесса: $\Delta A = p\Delta V$. При конечном изменении объема от V_1 до V_2 в обратимом процессе работа газа численно равна площади под кривой зависимости его давления от объема $p(V)$, ограниченной изохорами V_1 и V_2, т.е.

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV .$$

В задачах на расчет тепловых процессов с идеальным газом полезным оказывается введение понятия теплоемкости C газа в данном процесса:

$$\Delta Q = C\Delta T ,$$

где ΔT – малое изменение температуры газа при подведении к нему малого количества теплоты ΔQ. Заметим, что введенная таким образом теплоемкость зависит от вида процесса $p(V)$ и может менять свою величину и даже знак в ходе этого процесса.

Напомним теперь основные характеристики часто встречающихся процессов.

В изохорическом процессе нагрева или охлаждения газа работа газом (или внешними силами) не производится. Поэтому подведенное (или отведенное) количество теплоты Q равно изменению внутренней энергии газа: $Q = \Delta U = 3/2\, R\Delta T$ (для одного моля газа). Это соотношение оказывается верным для любого изменения температуры газа – как малого, так и конечного, поэтому соответствующая изохорическому процессу теплоемкость оказывается постоянной и для одного моля газа равной $3/2\, R$. Она называется молярной теплоемкостью при постоянном объеме и обозначается C_V. Таким образом,

$$C_V = \frac{3}{2} R ,$$

а внутренняя энергия идеального одноатомного газа оказывается равной

$$U = \frac{3}{2} RT = C_V T .$$

В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится от него. Работа газом (или над ним) совершается за счет изменения его внутренней энергии: $A = -\Delta U = -3/2\, R(T_2 - T_1)$, где T_2 и T_1 – температуры в конечном и начальном состояниях. Это оказывается верным как для малого, так и для конечного изменения температуры газа, поэтому в адиабатическом процессе для элементарной работы имеет место равенство

$$\Delta A = p\Delta V = -C_V\Delta T ,$$

где ΔV и ΔT – малые, по сравнению с первоначальными значениями, изменения объема и температуры газа. Теплоемкость в адиабатическом процессе, очевидно, равна нулю ($\Delta Q = C\Delta T = 0$).

В изотермическом процессе подвода или отвода тепла внутренняя энергия газа не изменяется. При расширении одного моля газа от объема V_1 до объема V_2 газ совершает работу, которую можно найти, воспользовавшись уравнением состояния газа $pV = RT$:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{RT}{V}\,dV = RT \ln\frac{V_2}{V_1}.$$

По закону сохранения энергии, подведенное к газ количество теплоты равно совершенной газом работе:

$$Q = A.$$

При расширении газа $A > 0$, при сжатии $A < 0$ (работа совершается внешними силами, тепло от газа отводится). Так как температура газа не изменяется ($\Delta T = 0$), теплоемкость газа в изотермическом процессе оказывается бесконечно большой.

В изобарическом процессе нагрева с постоянным давлением $p = p_0$ работа одного моля газа при расширении от объема V_1 до объема V_2 равна

$$A = p_0(V_2 - V_1) = R(T_2 - T_1) .$$

Подведенное количество теплоты Q идет на совершение работы и на увеличение $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$ внутренней энергии газа. Для нахождения теплоемкости C_p в изобарическом процессе воспользуемся уравнением процесса $p = p_0$ и уравнением состояния $pV = RT$:

$$\Delta Q = C_p\Delta T = \Delta U + p\Delta V = C_V\Delta T + R\Delta T = (C_V + R)\Delta T .$$

Отсюда получаем, что теплоемкость при постоянном давлении постоянна и для одного моля газа равна

$$C_p = C_V + R = \frac{5}{2}R .$$

Напомним также определение КПД тепловой машины, работающей по замкнутому циклу, в результаты которого внутренняя энергия газа (рабочего тела) не изменяется. По закону сохранения энергии, работа газа в замкнутом цикле A равна разности количества теплоты Q_1, подведенного к газу, и количества теплоты Q_2, отведенного от него. КПД цикла называется отношение

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} .$$

Еще раз подчеркнем, что для нахождения правильного значения КПД необходимо подсчитать тепло, подведенное *на всех участках* процессов, составляющих цикл. Так например, в изохорических процессах работа газом не производится, однако тепло подводится или отводится. В задачах могут также встречаться внешне простые участки зависимости $p(V)$, в ходе которых тепло как отводится, так и подводится. Если для такого участка найти «итоговое» подведенное или отведенное тепло, то при подсчете КПД может возникнуть ошибка. Отметим, наконец, что только для цикла Карно, состоящего из двух изотерм с температурами нагревателя T_1 и холодильника T_2, на которых, соответственно, подводится количество теплоты Q_1 и отводится Q_2, и двух адиабат, КПД может быть записан в виде

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} .$$

Разберем теперь некоторые конкретные задачи на тепловые процессы с участием одноатомного идеального газа.

Задача 1. *Сравните работы, количества теплоты и теплоемкости 1 моля идеального газа при переходе между двумя изотермами с температурами T_1 и T_2 в изобарическом процессе 1 и в процессе 2 с прямой пропорциональной зависимостью давления от объема (рис.1).*

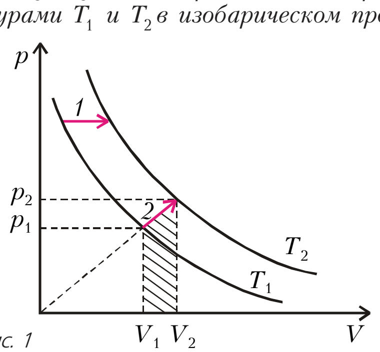

Рис. 1

Для изобары *1* мы имеем:

$$A_1 = R(T_2 - T_1) ,$$

$$\Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) ,$$

$$Q_1 = \Delta U_1 + A = \frac{5}{2}R(T_2 - T_1) .$$

Для процесса *2* (на диаграмме $p-V$ прямая проходит через начало координат) работа равна площади заштрихованной трапеции:

$$A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{2} = \frac{R}{2}(T_2 - T_1) .$$

Изменение внутренней энергии в этом процессе такое же, как в предыдущем:

$$\Delta U_2 = \Delta U_1 = \frac{3}{2}R(T_2 - T_1) ,$$

а количество теплоты, подведенное на участке *2*, равно

$$Q_2 = A_2 + \Delta U_2 = 2R(T_2 - T_1) .$$

Как видно, в обоих процессах работа и подведенное количество теплоты определяются лишь разностью температур конечного и начального состояний газа. Следовательно, теплоемкости в процессах остаются постоянными и равными, соответственно,

$$C_1 = \frac{5}{2}R , \quad C_2 = 2R .$$

При этом, независимо от начального давления для изобары и от наклона прямой в переходе с прямой пропорциональной зависимостью давления от объема, работы перехода между двумя изотермами отличаются в 2 раза, а теплоемкости – в 5/4 раза.

Задача 2. *Сравните работы и количества теплоты, подведенные к 1 молю газа, в процессе 1 изотермического расширения газа от объема V_1 до V_2 и в процессе 2 перехода между этими состояниями с линейной зависимостью давления от объема (рис.2).*

Для процесса *1* имеем:

$$A_1 = RT \ln \frac{V_2}{V_1} ,$$

$$Q_1 = A_1 .$$

Для процесса *2* работа равна площади соответствующей трапеции:

$$A_2 = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) ,$$

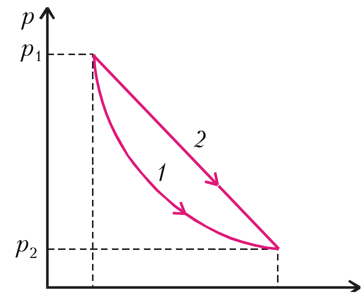

Рис. 2

или, если ввести обозначение $V_2/V_1 = \alpha$ и воспользоваться уравнением изотермы $p_1V_1 = p_2V_2 = RT$,

$$A_2 = \frac{p_1V_2 - p_2V_1}{2} = RT\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} .$$

Внутренняя энергия в процессе *2*, как и в процессе *1*, не изменилась, поэтому по закону сохранения энергии можно утверждать, что газу было передано количество теплоты

$$Q_2 = A_2 .$$

Итак, для обоих процессов работа определяется отношением конечного и начального объемов.

Отметим, что для процесса *2* теплоемкость не остается постоянной, более того – она меняет знак в ходе процесса от положительного к отрицательному. Это означает, что сначала тепло подводится, а затем отводится.

Задача 3. *Вершины замкнутого цикла, состоящего из четырех участков линейной зависимости давления от объема, лежат на двух изотермах с известными температурами T_1 и T_2*

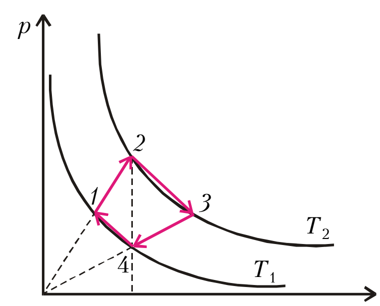

Рис. 3

(рис.3). Прямые 1–2 и 3–4 проходят через начало координат, объемы V_2 и V_4 равны. Найдите работу одного моля газа в замкнутом цикле.

Работы на участках *1–2* и *3–4* одинаковы по величине (см., например, задачу 1). Поэтому работа в цикле равна

$$A = A_{23} - A_{41} .$$

При этом
$$A_{23} = RT_2 \frac{\left(V_3/V_2\right)^2 - 1}{2V_3/V_2} =$$
$$= RT_2 \frac{\left(V_3/V_4\right)^2 - 1}{2V_3/V_4} = RT_2 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}}$$
(по условию $p_3/V_3 = p_4/V_4$, следовательно, $T_1/V_4^2 = T_2/V_3^2$) и, аналогично,
$$A_{41} = RT_1 \frac{T_2/T_1 - 1}{2\sqrt{T_2}/\sqrt{T_1}} .$$
Окончательно работа в цикле *1—2—3—4—1* равна
$$A = \frac{R\left(T_2 - T_1\right)^2}{2\sqrt{T_2T_1}} .$$

Задача 4. *Моль гелия из начального состояния с температурой $T = 300$ К расширяется в адиабатическом процессе так, что относительное изменение его давления составило $\Delta p/p = 1/120$. Найдите работу, совершенную газом, если относительные изменения его температуры и объема оказались также малыми.*

По условию, изменение объема газа мало, поэтому для адиабатического процесса элементарная работа равна
$$A = p\Delta V = -C_V\Delta T .$$
Изменения давления Δp, объема ΔV и температуры ΔT связаны уравнением состояния
$$(p + \Delta p)(V + \Delta V) = R(T + \Delta T) .$$
Пренебрегая произведением малых величин $\Delta p\Delta V$, находим
$$p\Delta V + V\Delta p = R\Delta T .$$
Исключим из последнего равенства $V\Delta p$ с помощью уравнения состояния:
$$V\Delta p = \frac{pV}{p}\Delta p = RT\frac{\Delta p}{p}$$
и воспользуемся выражением для работы:
$$A + RT\frac{\Delta p}{p} = \frac{R}{C_V}C_V\Delta T = -\frac{R}{C_V}A .$$
Окончательно получаем
$$A = \frac{C_V}{C_V + R}RT\frac{\Delta p}{p} = 12{,}5 \text{ Дж} .$$
(Читатель, знакомый с уравнением адиабаты для идеального газа, результат может получить с помощью этого уравнения и уравнения состояния.)

Задача 5. *Один моль одноатомного газа расширяется в изотермическом процессе 1—2, совершая работу A_{12}. Затем газ охлаждается в изобарическом процессе 2—3 и, наконец, в адиабатическом процессе 3—1 возвращается в исходное состояние (рис.4). Какую работу совершил газ в замкнутом цикле, если разность максимальной и минимальной температур в нем составила ΔT?*

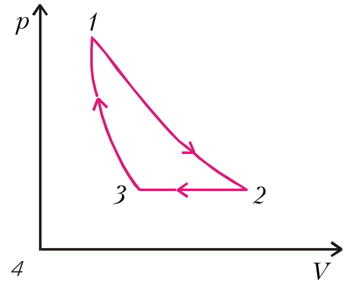

Рис. 4

Максимальная и минимальная температуры газа в цикле достигаются в адиабатическом процессе, так что $\Delta T = T_1 - T_3$. В адиабатическом процессе тепло к газу не подводится и не отводится от него, поэтому работа в цикле равна разности подведенного количества теплоты Q_{12} и отведенного Q_{23}. В изотермическом процессе подведенное количество теплоты равно совершенной газом работе:
$$Q_{12} = A_{12} ,$$
в изобарическом процессе отведенное количество теплоты составляет
$$Q_{23} = \left(C_V + R\right)\left(T_2 - T_3\right) = \left(C_V + R\right)\Delta T .$$
Итак, работа в цикле равна
$$A = A_{12} - \left(C_V + R\right)\Delta T = A_{12} - \frac{5}{2}R\,\Delta T .$$

Этот же результат можно получить, подсчитав алгебраическую сумму работ газа на всех трех участках цикла (в чем читатель может убедиться самостоятельно).

Задача 6. *Моль гелия из начального состояния 1 с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в равновесное состояние 2. Этот процесс происходит без подвода либо отвода тепла. Затем газ сжимают в процессе 2—3 линейной зависимости давления от объема и, наконец, по изохоре 3—1 возвращают в исходное состояние (рис.5). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе 1—2, если в процессах 2—3 и 3—1 к газу в итоге было подведено количество теплоты $Q = 72$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$ и $V_2/V_3 = 3$.*

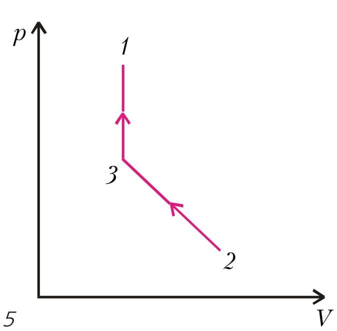

Рис. 5

Хотя процесс расширения *1—2* через турбину необратим, но, если начальное и конечное состояния равновесны, по закону сохранения энергии можно утверждать, что работа, совершенная в этом процессе, равна изменению внутренней энергии газа:
$$A_{12} = -C_V\left(T_2 - T_1\right) = C_V\left(T_1 - T_2\right) .$$
На участке сжатия *2—3* теплоемкость не остается постоянной, однако внутренняя энергия газа не изменяется ($T_2 = T_3$). Поэтому итоговое отведенное на этом участке количество теплоты численно равно работе сжатия:
$$Q_{23} = RT_2\frac{\left(V_2/V_3\right)^2 - 1}{2V_2/V_3}$$
(см., например, задачу 2). Чтобы упростить дальнейшие выкладки, подставим отношение объемов $V_2/V_3 = 3$:
$$Q_{23} = \frac{4}{3}RT_2 .$$
На участке изохорического нагрева *3—1* к газу подводится количество теплоты
$$Q_{31} = C_V\left(T_1 - T_3\right) = C_V\left(T_1 - T_2\right) .$$
По условию,
$$Q = Q_{31} - Q_{23} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) - \frac{4}{3}RT_2 ,$$
откуда находим
$$RT_2 = \frac{9}{17}RT_1 - \frac{6}{17}Q .$$
Окончательно для работы расширения через турбину имеем
$$A_{12} = \frac{3}{2}R\left(T_1 - T_2\right) =$$
$$= \frac{12}{17}RT_1 + \frac{9}{17}Q \approx 625 \text{ Дж} .$$

Задача 7. *Найдите КПД цикла 1—2—3—1, проведенного с одним молем одноатомного газа и состоящего из участка линейной зависимости давления от объема (прямая 1—2 проходит через начало координат диаграммы p–V), изохоры 2—3 и изобары 3—1 (рис.6). Известно, что $p_2 = 2p_1 = 2p_0$, $V_3 = V_2 = 2V_1 = 2V_0$.*

Тепло подводится на участке *1—2*, где теплоемкость постоянна и равна $2R$ (см., например, задачу 1):
$$Q_1 = Q_{12} = 2R\left(T_2 - T_1\right) = 6p_0V_0 .$$

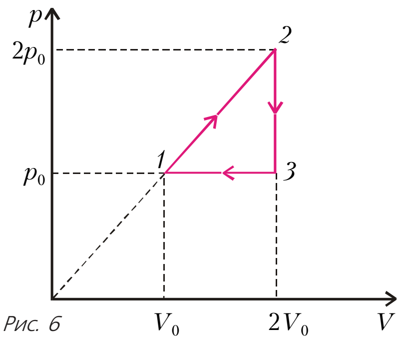

Рис. 6

Тепло отводится на изохоре *2—3*:

$$Q_{23} = C_V(T_2 - T_3) = 3p_0V_0$$

и на изобаре *3—1*:

$$Q_{31} = (C_V + R)(T_3 - T_1) = \frac{5}{2}p_0V_0 .$$

Суммарное отведенное тепло равно

$$Q_2 = Q_{23} + Q_{31} = \frac{11}{2}p_0V_0 ,$$

работа в цикле составляет

$$A = Q_1 - Q_2 = \frac{1}{2}p_0V_0$$

(этот результат очевиден, так как работа в цикле – это площадь прямоугольного треугольника *1 2 3* с катетами p_0 и V_0), а КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{A}{Q_1} = \frac{1}{12} .$$

Отметим, что при решении этой задачи (и других подобных) абитуриенты часто приводят «очевидный» ответ $\eta = 1/3$. Трактуется это как отношение «полезной» работы в цикле $A = p_0V_0/2$ к «затраченной» на участке *1—2* работе $A_{12} = 3/2\,p_0V_0$. При таком «решении», очевидно, неверно подсчитано подведенное в цикле тепло Q_1.

Задача 8. *В замкнутом цикле, состоящем из изотермы 1—2, изохоры 2—3 и адиабаты 3—1 (рис.7), КПД равен η, а разность максимальной и минимальной температур равна ΔT. Найдите работу расширения в изотермическом процессе, если рабочее тело – моль гелия.*

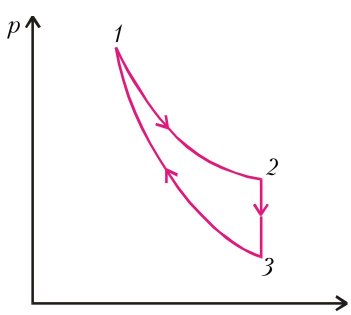

Рис. 7

Тепло в цикле подводится на изотерме:

$$Q_1 = Q_{12} = A_{12} ,$$

а отводится на изохоре:

$$Q_2 = Q_{23} = C_V(T_2 - T_3) = C_V\Delta T .$$

КПД цикла равен

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{C_V\Delta T}{A_{12}} ,$$

откуда

$$A_{12} = \frac{3/2\,R\Delta T}{1 - \eta} .$$

Заметим, что это один из немногих примеров, когда КПД равен отношению работы в цикле (полезной работы, равной площади фигуры внутри кривых, образующих цикл) к работе на изотерме (затраченной работе, равной площади под кривой изотермического процесса). Читателю предоставляется самостоятельно понять, почему при неправильном определении КПД получается правильный результат, а также придумать хотя бы еще один цикл, обладающий таким же свойством.

Задача 9. *КПД цикла 1—2—3—1 (рис.8), где 1—2 – изохора, 2—3 – изобара и 3—1 – участок линейной зависимости давления от объема (на диаграмме p—V – это прямая с произвольным положительным наклоном), равен η_1. Найдите КПД цикла 1—3—4—1, в котором 3—4 – изохора, 4—1 – изобара. Рабочее тело в обоих случаях – моль гелия.*

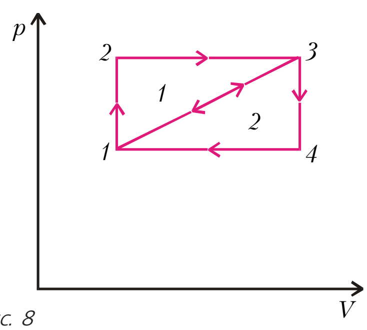

Рис. 8

В цикле *1—2—3—1* тепло Q_2 отводится на участке *3—1*. Хотя теплоемкость в этом процессе и не остается постоянной, но можно показать, что она не меняет знака. С другой стороны, температура в этом процессе является монотонной функцией объема. Поэтому для цикла *1—2—3—1* тепло на участке *3—1* только отводится, а, соответственно, для цикла *1—3—4—1* – только подводится. Работа в рассматриваемых циклах одна и та же. Обозначив ее через A, для первого цикла имеем

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{A}{A + Q_2} ,$$

где Q_1 – количество теплоты, подведенное на изохоре *1—2* и на изобаре *2—3*. Аналогично, для второго цикла тепло подводится на участке *1—3* в количестве Q_2, поэтому

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{\eta_1}{1 - \eta_1} .$$

Упражнения

1. Моль гелия расширяется в процессе $p^2V = \text{const}$ так, что изменение его температуры равно $\Delta T = 0{,}3$ К. Какую работу совершил газ, если известно, что относительные изменения его давления $\Delta p/p$, объема $\Delta V/V$ и температуры $\Delta T/T$ оказались малыми.

2. Моль гелия совершает работу A в замкнутом цикле, состоящем из изобары *1—2*, изохоры *2—3* и адиабаты *3—1* (рис.9). Сколько тепла было подведено к газу в изобарическом процессе, если разность максимальной и минимальной температур газа в цикле составила ΔT?

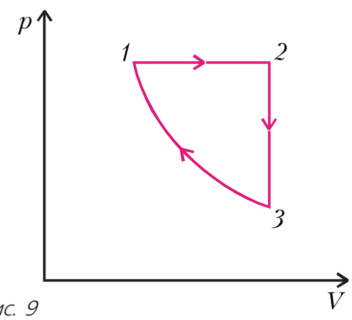

Рис. 9

3. Моль гелия из начального состояния *1* с температурой $T_1 = 100$ К, расширяясь через турбину в пустой сосуд, совершает некоторую работу и переходит в состояние *2*. Этот переход происходит без подвода или отвода тепла. Затем газ сжимают в двух процессах, возвращая его в исходное состояние. Сначала сжатие происходит в процессе *2—3* с линейной зависимостью давления от объема, а затем – в адиабатическом процессе *3—1* (рис.10). Найдите работу, совершенную газом при расширении через турбину в переходе *1—2*, если в процессе сжатия *2—3—1* над газом была совершена работа $A = 1090$ Дж. Известно, что $T_2 = T_3$, $V_2/V_3 = 2$.

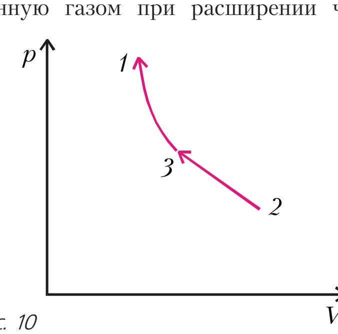

Рис. 10

4. В цикле *1—3—4—1* (см. рис.8) КПД равен η. Чему равен КПД цикла *1—2—3—4—1*?