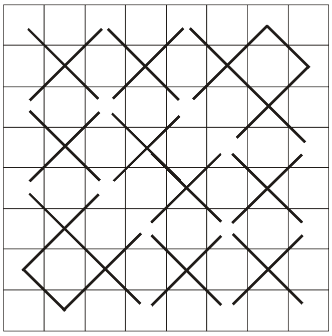

Рис. 5

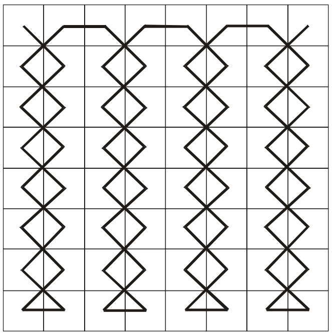

Рис. 6

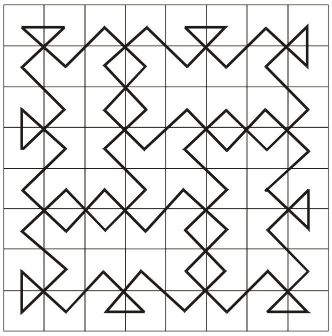

Рис. 7

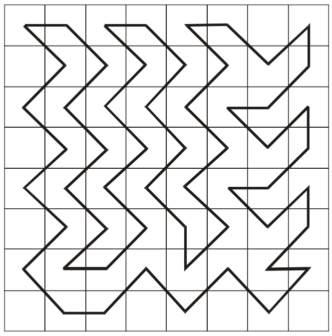

Рис. 8

Очевидно, путь короля не может пройти более чем по двум отрезкам любого креста. Не может пройти он и более чем по пяти отрезкам любой из угловых групп, как и более чем по шести отрезкам центральной группы.[2] Значит, всего в путь короля входит самое большее $6 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 6 = 28$ белых диагональных ходов.

Если путь короля состоит из k белых цепочек, состоящих, соответственно, из n_1, n_2, ..., n_k клеток, то $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 32$ (общее число белых полей). При прохождении этих цепочек король делает, соответственно, $n_1 - 1$, $n_2 - 1$, ..., $n_k - 1$ диагональных ходов. Поэтому общее число белых диагональных ходов короля равно

$$\left(n_1 - 1\right) + \left(n_2 - 1\right) + \ldots + \left(n_k - 1\right) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = 32 - k.$$

Как мы уже знаем, это число не превосходит 28. Значит, $32 - k \le 28$, откуда $k \ge 4$.

Итак, белых цепочек не менее чем 4. Аналогично, черных цепочек тоже не менее чем 4. Значит, общее число цепочек не меньше 8 и число объединяющих их воедино «прямых» ходов не меньше $8 - 1 = 7$. Следовательно, число диагональных ходов не превосходит $63 - 7 = 56$. Путь, содержащий ровно 56 диагональных ходов, легко предъявить (рис.6). Долго ли, коротко ли, но и эта задача решена.

Теперь на очереди – замкнутый самопересекающийся маршрут. Ясно, что наши рассуждения о цепочках применимы и здесь, так что число диагональных ходов не превышает того же числа 56 (с той лишь разницей, что «прямых» ходов здесь не менее 8, а не 7, а всех ходов – 64, а не 63).

Но существует ли такой маршрут, в котором 56 диагональных ходов? В поисках его, изрисовав много бумаги, я обнаружил замысловатый «орнамент» (рис.7). В нем (подсчитайте, если не верите на слово) ровнешенько 56 диагональных ходов. Ура?

Как бы не так! На самом деле это не один, а два замкнутых маршрута. Правда, их легко «сцепить», заменив в одном месте пару пересекающихся диагоналей парой «прямых» ходов, но тогда получится маршрут всего лишь с 54 диагональными ходами.[3]

Итак, мне не удалось найти маршрут с 56 диагональными ходами, но не удалось и доказать, что его нет. Вся надежда – на читателей. Может быть, удастся применить компьютер, может быть, найдете какое-то ускользнувшее от меня соображение? (Если что-то придумаете – не забудьте сообщить об успехе в редакцию «Кванта»!)

Неожиданное развитие темы предложил А.Спивак. Давайте откажемся от необходимости обхода королем *всех* полей доски. Приведет ли это к увеличению максимально возможного числа диагональных ходов? Казалось бы, не должно: ведь чем меньше обойдено полей, тем меньше сделано ходов, а чем меньше ходов, тем меньше, казалось бы, и диагональных ходов.

Но давайте разбираться по порядку. В случае незамкнутого несамопересекающегося маршрута мы доказали, что число диагональных ходов не превосходит 49, причем в доказательстве нигде не использовалось требование о непременном обходе всех полей доски. Так что ответ здесь остается тем же: 49. Аналогично и для самопересекающихся маршрутов: мы убедились, что диагональных ходов каждого цвета (белых и черных) не более 28, так что всего их не более $28 \cdot 2 = 56$, чего мы успешно достигли для незамкнутого маршрута и почти достигли для замкнутого.

Однако совсем иной результат получается, если отказаться от обхода всех полей в исходной задаче Ходулева – для замкнутого несамопересекающегося пути короля. Здесь идея решения (о граничных полях) исчезает совершенно и потому число диагональных ходов может значительно превзойти 36. На рисунке 8 показан маршрут с 44 диагональными ходами. Но доказательства максимальности этого значения (как и уверенности в такой максимальности) у нас нет. Так что и здесь надеюсь на помощь читателей.

А вот еще одна задача о королевских прогулках.

На некотором поле шахматной доски стоит король. Двое по очереди передвигают его по доске. Тот, после хода которого король окажется на поле, где уже побывал, проигрывает. Кто выиграет в такой игре, если оба играют наилучшим образом?

Оказывается, выигрывает начинающий, причем при любом исходном положении короля. Для этого ему надо мысленно разбить доску на прямоугольники, состоящие из двух соседних клеток (это можно сделать многими способами). Далее первым своим ходом он ставит короля на клетку, парную с той, на которой король находился изначально (т.е. на вторую клетку того же прямоугольника). Затем в ответ на каждый ход соперника он всегда ставит короля на клетку, парную той, на которой король в тот момент находится. Таким образом, после каждой пары ходов один прямоугольник окажется «использованным». Ясно, что рано или поздно соперник будет вынужден поставить короля на клетку, принадлежащую уже использованному прямоугольнику, и, таким образом, дважды посетить одно и то же поле.

* * *

Вот что такое по-настоящему хороша задача. Она живет своей жизнью, порождая другие задачи, заставляет нас размышлять над ней долгие годы.

[2] *Убедиться в этом чуть сложнее. Можете рассуждать так: в противном случае в маршрут не вошли бы самое большее два из всех диагональных ходов соответствующей группы, что явно (см. рис.5) приводит к повторному посещению королем одного и того же поля.*

[3] *Шахматная раскраска делает очевидным то, что невозможен замкнутый маршрут с 55 диагональными ходами (как невозможен и никакой замкнутый маршрут с нечетным числом диагональных ходов).*