# Возвращающая сила и частота колебаний системы

П.ХАДЖИ, Л.ГЛАЗОВА, В.ЛИЧМАН

Как известно, собственные частоты колебаний различных колебательных систем можно вычислять с помощью закона сохранения энергии. Но это не единственный метод, приводящий к успеху. В ряде случаев более приемлемым может оказаться другой метод – с использованием возвращающей силы, действующей на колебательную систему. Идея здесь состоит в следующем.

Простейшие гармонические колебания совершаются под действием упругой силы, т.е. силы, величина которой пропорциональна смещению $x$ из положения равновесия: $F = kx$, где $k$ – так называемый коэффициент упругости (жесткость) системы, и направлена в сторону, противоположную направлению смещения. Однако часто, рассматривая малые колебания более сложных систем, тоже удается представить возвращающую силу в виде $F = kx$, т.е. пропорциональной смещению из положения равновесия и имеющей вид квазиупругой силы с коэффициентом $k$, величина которого зависит от параметров системы. Зная коэффициент $k$ и массу $m$ колеблющегося тела, легко найти частоту $\omega$ собственных колебаний системы, пользуясь хорошо известной формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

### Колебания заряженного шарика вдоль вертикальной направляющей

Пусть вдоль непроводящей вертикальной направляющей может двигаться без трения маленький (точечный) шарик массой $m$, несущий заряд $q$. В нижнем конце направляющей неподвижно закреплен второй шарик, имеющий заряд $Q$ (рис.1). Определим частоту малых колебаний первого шарика вдоль направляющей.

Случай, когда заряды $q$ и $Q$ являются разноименными, не представляет

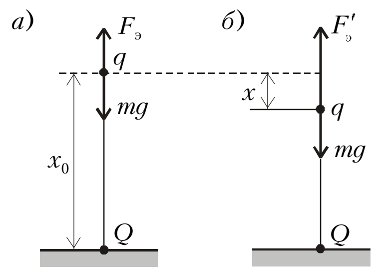


Рис. 1

интереса, поэтому будем считать заряды одноименными. На подвижный шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила электростатического взаимодействия $\vec{F}_э$ со стороны нижнего шарика, направленная вертикально вверх (см. рис.1,*а*). По-видимому, под действием этих сил шарик может находиться в равновесии. Условие равновесия имеет вид

$$F_э = mg.$$

Найдем положение равновесия подвижного шарика, отсчитывая расстояние $x_0$ от нижнего шарика. В соответствии с законом Кулона сила электростатического отталкивания равна

$$F_э = qQ\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 x_0^2\right).$$

Тогда из условия равновесия получаем

$$x_0 = \sqrt{Qq\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 mg\right)}.$$

Как видно, $x_0$ тем больше, чем больше величины зарядов $Q$ и $q$ и чем меньше масса подвижного шарика $m$.

Легко показать, что это равновесие является устойчивым. В самом деле, при смещении шарика вниз сила электростатического отталкивания возрастает, так как уменьшается расстояние между шариками, а сила тяжести не изменяется. Поэтому возникает возвращающая сила, направленная вверх, т.е. против смещения. Если же шарик сместить вверх, то сила отталкивания уменьшается, поэтому возникает возвращающая сила, направленная вниз.

Таким образом, шарик, выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе, будет совершать колебания относительно положения равновесия. Определим частоту $\omega$ этих колебаний, считая их малыми. Критерием малости колебаний является малость смещения $x$ относительно положения равновесия по сравнению с характерной длиной в системе, какой является расстояние $x_0$:

$$x \ll x_0.$$

Сместим подвижный шарик, например вниз, на расстояние $x$ (см. рис.1,*б*). В этом случае на него действует сила отталкивания $\vec{F}'_э$, которая по величине больше $F_э$, и неизменная сила тяжести $m\vec{g}$, поэтому возвращающая сила, равная разности сил отталкивания и тяжести, будет равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(x_0 - x\right)^2} - mg.$$

Приводя к общему знаменателю и расписывая в числителе квадрат разности, получаем

$$F = \frac{qQ\Big/\left(4\pi\varepsilon_0\right) - mg\left(x_0^2 - 2x_0x + x^2\right)}{\left(x_0 - x\right)^2}.$$

Первые два члена в числителе дают в сумме точный ноль, а четвертым слагаемым можно пренебречь по сравнению с третьим. Кроме того, в знаменателе можно пренебречь $x$ по сравнению с $x_0$. Тогда остается

$$F = \frac{2mg}{x_0}\cdot x.$$

Выражение для возвращающей силы $F$ имеет такой же вид, что и выражение для упругой силы, где роль коэффициента «упругости» играет величина

$$k = \frac{2mg}{x_0} = 4mg\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mg}{qQ}}.$$

Используя формулу для частоты малых колебаний, находим

$$\omega = 2\sqrt{g\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mg}{qQ}}}.$$

Частота колебаний заряженного ша-