янии $K = 1$ от корня имеется 4 вершины, на расстоянии $K = 2$ от корня имеется $4 \cdot 3$ вершин, ..., на произвольном расстоянии K от корня имеется $4 \cdot 3^{K-1}$ вершин. Суммируя, получаем

$$S = 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + 4 \cdot 3^{K-1} =$$

$$= 1 + 4\frac{3^K - 1}{3 - 1} = 2 \cdot 3^K - 1,$$

что при $K = \langle K_N \rangle = \frac{1}{2} N \; (N \gg 1)$ дает

$$S = 2\left(\sqrt{3}\right)^N - 1 \simeq 2\left(\sqrt{3}\right)^N.$$

Следовательно, вероятность возвращения в исходную точку можно оценить как $P_N \simeq 1 \Big/ \left(2\left(\sqrt{3}\right)^N\right)$, что при $N = 100$ составляет примерно $P_N \simeq 1 \Big/ \left(1{,}43 \cdot 10^{24}\right)$. Это означает, что если играть в жмурки в лесу каждый день, то примерно 1 раз в $4 \cdot 10^{21}$ лет водящий не только случайно вернется в начальную точку, но и его траектория из 100 шагов случайно окажется незацепленной за деревья!

Соответственно, в трехмерном пространстве вероятность случайного самопроизвольного выпутывания нити из решетки топологических препятствий оценивается как $P_N \simeq 1/V$, где V – «объем» дерева Кейли, отвечающего блужданию на кубической решетке. В этом случае в каждой вершине дерева есть 6 возможностей пойти по разным направлениям, так как дерево Кейли имеет 6 ветвей. Вычисляя V точно так же, как это делалось для площади S, получим

$$V = 1 + 6 + 6 \cdot 5 +$$

$$+ 6 \cdot 5^2 + \ldots + 6 \cdot 5^{\langle K_N \rangle - 1} =$$

$$= 1 + 6\frac{5^{\langle K_N \rangle} - 1}{5 - 1} = \frac{3}{2} \cdot 5^{\langle K_N \rangle} - \frac{1}{2},$$

где

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{5}{6} \cdot (+1) + \frac{1}{6} \cdot (-1)\right) N = \frac{2}{3} N,$$

откуда

$$P_N \simeq \frac{2}{3\left(\sqrt[3]{25}\right)^N}.$$

Этот результат и даст ответ на вопрос, почему, случайно дергая веревку, находящуюся в плотном клубке, ее практически невозможно выпутать – *вероятность такого события чрезвычайно мала!*

Таким образом, практический вопрос о распутывании веревок разрешен, и теперь можно подумать, откуда взялось дерево Кейли и каким образом удалось незаметно подменить задачу о случайном блуждании среди топологических препятствий задачей о блуждании без каких-либо ограничений на дереве, имеющем структуру дерева Кейли.

Дерево Кейли – это аналог фазового пространства узлов, мимоходом упомянутого в начале статьи. Хотя в данном случае правильнее говорить о пространстве зацеплений, каждая точка которого (т.е. каждая вершина дерева Кейли) отвечает вполне определенному типу зацепления траектории случайного блуждания за решетку препятствий. Внимательный читатель сразу же заметит, что многие вершины дерева Кейли соответствуют одной и той же точке на плоскости с топологическими препятствиями, но при этом разные вершины дерева отвечают разным топологическим состояниям. Тем самым, каждая точка дерева Кейли несет информацию как о геометрическом положении конца траектории случайного блуждания, так и о топологии пути в модели ИЖЛ.

Попробуем нарисовать дерево Кейли на листе бумаги. Выберем точку и будем считать ее корнем дерева. С 1-ым поколением проблем нет – мы всегда можем нарисовать 4 ветви, выходящие из корня так, что соседние ветви образуют прямые углы друг с другом. А вот что делать дальше, если мы хотим, чтобы все ветви имели одну и ту же длину, чтобы угол между соседними ветвями, выходящими из одной точки, был один и тот же и чтобы никакие ветви не касались, не накладывались и не пересекались? Ну хорошо, выбрав в следующем поколении угол поменьше, мы продвинемся дальше и сможем нарисовать без пересечений еще 2–4 поколения. А потом? После нескольких (возможно, и нескольких десятков) не очень удачных попыток нам придется смириться с тем фактом, что на листе бумаги построить дерево Кейли без наложений, самопересечений, с одной и той же длиной ветви и одинаковыми углами между соседними ветвями, т.е. *изометрически*, нельзя.

Все это означает, что дерево Кейли не вкладывается в евклидову плоскость, и возникает вопрос о том, как должна быть устроена поверхность, в которой можно изометрически (т.е. без пересечений и наложений) уложить дерево Кейли. Подсчитаем, как растут периметр и площадь дерева Кейли. Периметром P назовем число вершин дерева Кейли, находящихся на расстоянии K шагов от корня (где K играет роль радиуса), тогда $P = = 4 \cdot 3^{K-1}$. Площадь мы уже вычисляли – это количество всех вершин дерева Кейли, лежащих от корня на расстоянии *не большем* чем K: $S = 2 \cdot 3^K - 1$. Таким образом, при $K \to \infty$

$$\frac{P}{S} \to \frac{2}{3}.$$

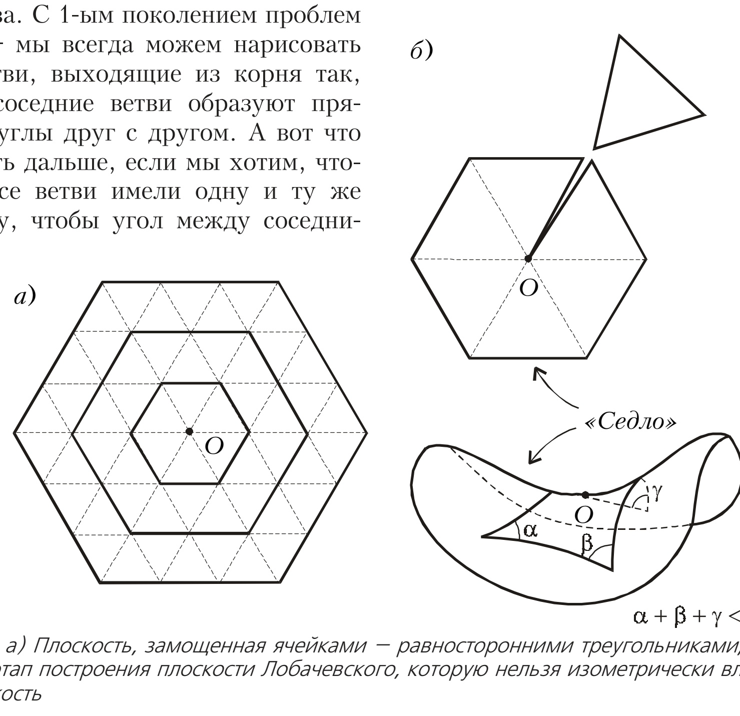

Рис.4. а) Плоскость, замощенная ячейками – равносторонними треугольниками; б) начальный этап построения плоскости Лобачевского, которую нельзя изометрически вложить в плоскость