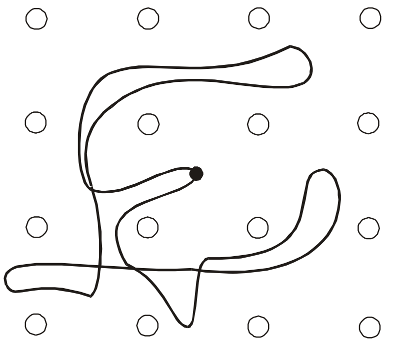

Рис.2. Пример траектории, не зацепленной за деревья

ющие траектории считаются зацепленными за деревья.

Откроем секрет: физики часто решают сходные геометрические задачи и даже используют в работе наглядные образы, подсмотренные в повседневной жизни, но при этом почему-то стесняются публиковать в серьезных научных журналах статьи, которые, скажем, назывались бы так: «О топологии игры в жмурки в лесу» или «О вероятности развязывания шнурков при быстрой ходьбе». Вместо этого ученые с серьезным видом предпочитают говорить и писать об узлах в полимерных системах или о топологии вихревых линий в сверхпроводниках.

Ну что ж, раз так принято, не будем нарушать традицию и скажем, что модель ИЖЛ – Игра в Жмурки в Лесу – является в настоящее время общепризнанной моделью, описывающей термодинамические свойства системы большого числа полимерных цепей с топологическими ограничениями. При этом обычно предполагается, что решетка препятствий (лес) моделирует зацепления «пробной» цепи (траектории водящего) за другие цепи системы («внешней среды»). Пренебрегая флуктуациями среды (т.е. считая, что деревья стоят на месте), а также топологическими ограничениями, которые пробная цепь создает сама для себя (водящий может спокойно несколько раз проходить по одному и тому же месту), мы теряем информацию о том, как влияет пробная цепь на среду, однако даже в этом случае можем сделать интересные выводы о статистике пробной цепи.

Трехмерную модель ИЖЛ можно определить следующим образом. Пусть случайное блуждание из N шагов помещено между ребрами кубической решетки и траектория не может пересекать («проходить сквозь») никакое ребро решетки. Эта система уже содержит основные черты клубка перепутанных веревок: ребра решетки – это участки различных нитей, создающих топологические ограничения, а случайное блуждание – это нить, которую мы хотим выпутать из клубка, хаотически дергая ее в разные стороны. Таким образом, для того чтобы ответить на вопрос о вероятности случайного выпутывания нити, необходимо вычислить вероятность того, что нить, флуктуируя, случайно образует замкнутое кольцо, не зацепленное за ребра решетки.

Начнем с двумерного решеточного варианта модели ИЖЛ. В этом случае траектория водящего – это случайное блуждание по ребрам квадратной решетки, а деревья (препятствия) расположены на решетке, сдвинутой на половину периода (рис. 3,*а*). На каждом шаге у водящего есть 4 одинаковые возможности пойти в разные стороны, но если мы хотим, чтобы после N шагов траектория была замкнута и не зацеплена за деревья, необходимо, чтобы водящий сделал столько же шагов на юг, сколько на север, и столько же шагов на запад, сколько на восток, и чтобы траектория полностью состояла из «шпилек», т.е. сложенных вдвое, вчетверо и т.д. кусков – только в этом случае траектория не будет зацеплена за деревья. Иными словами, траектория водящего должна иметь структуру случайно ветвящегося дерева, составленного из участков, пройденных «туда и обратно». Будем постепенно «стягивать» траекторию, считая ее резиновой. Тогда, последовательно сокращая шпильки, получим траекторию, которая может быть полностью стянута в точку.

Таким образом, мы показали, что древесная структура *достаточна* для стягиваемости траектории. Доказательство же *необходимости* того, что траекторию водящего можно стянуть в точку непрерывной деформацией, если соответствующая траектория может быть представлена в виде пути на дереве, мы представляем читателю провести самостоятельно.

Итак, у нас есть два условия: а) траектория должна быть замкнута и б) траектория должна иметь вид случайно ветвящегося дерева. Оба эти условия выполняются, если считать, что случайное блуждание происходит на графе, имеющим структуру дерева с четырьмя ветвями (рис.3,*б*). В самом деле, на таком графе, имеющим название дерева Кейли, нет другой возможности после N шагов вернуться в исходную точку, как пройти по каждой ветви дерева вперед-назад, сделав шпильку. Нетрудно подсчитать, как далеко мы уйдем по дереву Кейли от некоторой начальной точки («корня») за N случайных шагов. На каждом шаге у нас имеется 3 возможности из 4 пойти от корня (в направлении «+») и к корню (в направлении «–»). Соответственно, среднее расстояние $\langle K_N \rangle$, на которое можно уйти за N шагов, есть

$$\langle K_N \rangle = \left(\frac{3}{4}\cdot(+1) + \frac{1}{4}\cdot(-1)\right)N = \frac{1}{2}N .$$

Теперь, для того чтобы грубо оценить вероятность возвращения при случайном блуждании по дереву Кейли в исходную точку (в корень дерева), вновь воспользуемся оценкой $P_N \simeq 1/S$, где S – число всех вершин дерева Кейли внутри радиуса $K = \langle K_N \rangle$. Величину S можно вычислить по геометрической прогрессии: в точке $K = 0$ имеется одна вершина (корень дерева), на рассто-

а) *б)*

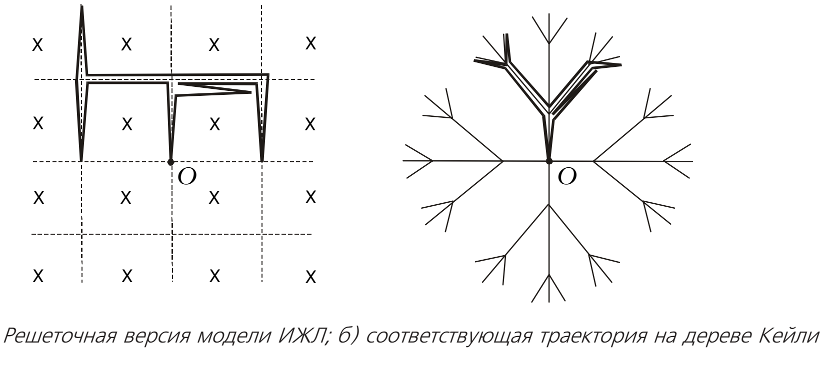

Рис.3. а) Решеточная версия модели ИЖЛ; б) соответствующая траектория на дереве Кейли