Периодические дроби

Л.СЕМЁНОВА

Как вы знаете, обыкновенная дробь – это число, составленное из целого количества долей единицы. Дробь записывают в виде $\frac{m}{n}$ или m/n, где числитель m – целое число, а знаменатель n – натуральное число. Для получения дроби m/n надо разделить единицу на n равных частей и взять m таких частей. Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить на одно и то же натуральное число. Благодаря этому любые две дроби k/l и m/n можно привести к общему знаменателю ln, заменив их на $kn/(ln)$ и $ml/(ln)$.

Если числитель и знаменатель дроби имеют отличный от единицы общий делитель, то дробь можно сократить – разделить на него числитель и знаменатель. Вследствие этого всякую дробь можно представить в несократимом виде, т. е. в виде дроби, числитель и знаменатель которой – взаимно простые числа[1]. Например, $120/344$ – сократимая дробь ($\frac{120}{344} = \frac{15\cdot 8}{43\cdot 8} = \frac{15}{43}$), а $15/43$ – равная ей несократимая дробь.

Дробь m/n называют *правильной*, если $0 \le m < n$. Всякую дробь можно единственным образом представить в виде суммы целого числа $[m/n]$ (целой части дроби m/n) и правильной дроби $\{m/n\}$ (дробной части). Например,

$$\frac{91}{17} = \frac{5\cdot 17+6}{17} = 5 + \frac{6}{17}.$$

Сумму и разность дробей с одинаковыми знаменателями определяют по правилам:

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}.$$

[1] *Числа m и n называют взаимно простыми, если единственным их общим делителем является число 1, т.е. если число m не делится ни на один из простых делителей числа n.*

Чтобы сложить или вычесть дроби k/l и m/n с разными знаменателями, их предварительно приводят к общему знаменателю. Обычно в качестве него берут наименьшее общее кратное НОК$[l,n]$ чисел l и n.

Нидерландский ученый и инженер Симон Стевин (1548–1620) предложил использовать десятичные дроби, т.е. дроби, знаменатели которых – степени числа 10. Складывать, вычитать и сравнивать[2] их легче, чем обыкновенные дроби. Десятичные дроби обычно пишут без знаменателя, например, $\frac{5481475}{10000} = 548{,}1475$ и $\frac{23}{1000} = 0{,}023$.

Известно вам и то, что рациональное число (обыкновенная дробь) – это периодическая десятичная дробь, а иррациональное – непериодическая. Но далеко не каждый может объяснить, почему это так. А уж на вопросы: «Какова длина периода десятичного представления дроби $1/7^7$? Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны 6 и 12?» – ответят очень и очень немногие.

Эта статья – обстоятельный рассказ о связи между обыкновенными и периодическими десятичными дробями. Мы научимся решать некоторые весьма непростые задачи и докажем одну из важнейших теорем арифметики – теорему Эйлера (и ее частный случай – малую теорему Ферма). Но не будем торопиться, а разберем все по порядку.

От обыкновенной дроби – к десятичной

Как записать обыкновенную дробь m/n в десятичной системе счисления? Если n – степень двойки, степень пятерки или произведение степеней двойки и пятерки, то получится – конечная десятичная дробь. Например,

$$\frac{13}{64} = \frac{13\cdot 15625}{64\cdot 15625} = \frac{203125}{1000000} = 0{,}203125;$$

$$\frac{3}{25} = \frac{3\cdot 4}{25\cdot 4} = 0{,}12;$$

$$\frac{3}{40} = \frac{3\cdot 25}{40\cdot 25} = \frac{75}{1000} = 0{,}075.$$

[2] *Это очень важно для практики: десятичные дроби гораздо легче сравнивать между собой, чем обыкновенные!*

Хотя число 35 не является произведением степеней двойки и пятерки, сократимая дробь $7/35$ представима в виде конечной десятичной дроби:

$$7/35 = 1/5 = 0{,}2.$$

Но если дробь m/n несократима и при этом хотя бы один из простых делителей числа n отличен от 2 и 5, то m/n нельзя представить в виде конечной десятичной дроби[3].

Переводить дроби из обыкновенных в десятичные можно делением «уголком». Например, разделим 3 на 7:

$$\begin{array}{l|l}
\underline{3} & 7 \\
\underline{0} & 0{,}4285714 \\
\underline{30} & \\
\underline{28} & \\
\underline{20} & \\
\underline{14} & \\
\underline{60} & \\
\underline{56} & \\
\underline{40} & \\
\underline{35} & \\
\underline{50} & \\
\underline{49} & \\
\underline{10} & \\
\underline{7} & \\
\underline{30} & \\
\underline{28} & \\
\ldots &
\end{array}$$

Целая часть равна 0. Чтобы получить первую цифру после запятой, разделим 30 на 7. Получим частное 4 и остаток 2. Разделив 20 на 7, получаем частное 2 и остаток 6. Следующий шаг – деление 60 на 7 – дает частное 8 и остаток 4. Далее,

$$40 = 5\cdot 7 + 5,$$

$$50 = 7\cdot 7 + 1,$$

$$10 = 1\cdot 7 + 3.$$

Мы вернулись к задаче деления 3 на 7; произошло зацикливание: если продолжим деление, то опять получим

[3] *Действительно, если $m/n = a/10^b$, то $10^b m = an$; рассмотрев любой отличный от 2 и 5 простой делитель p числа n, приходим к противоречию: an кратно p, а равное ему число $10^b m$ – не кратно.*

частное 4 и остаток 2, затем будем делить 20 на 7, и так далее:

$$\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571\ldots$$

Обычно этот результат записывают короче:

$$\frac{3}{7} = 0{,}(428571),$$

т.е. заключают повторяющуюся группу цифр в скобки и говорят: «428571 в периоде»[4].

Если повторяющаяся группа цифр (период) расположена непосредственно после запятой, то такую десятичную дробь называют *чисто периодической*; в противном случае говорят, что дробь имеет *предпериод* и называют ее *смешанной периодической.*

Теорема 1. *Десятичное представление дроби m/n, где m, n – натуральные числа, $m < n$,– периодическая дробь, длина наименьшего периода которой не превосходит $n - 1$.*

Доказательство. Чтобы получить первую цифру после запятой, мы приписываем к m нуль (т.е. умножаем m на 10) и делим (с остатком) полученное число на n. Вообще весь процесс деления уголком – повторяемое вновь и вновь умножение очередного остатка на 10 и деление (с остатком) на n.

Если на каком-то шаге получится нулевой остаток, то дробь – конечная. Конечную дробь, приписав к ней справа бесконечно много нулей, естественно считать периодической с периодом длины 1. По условию, $1 \le n - 1$, так что в этом случае утверждение теоремы выполнено.

Если же процесс деления никогда не закончится, то будут получаться только ненулевые остатки, т.е. числа от 1 до $n - 1$. Значит, не позже чем на n-м шаге остаток повторится. С этого момента процесс деления зациклится, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Убедитесь, что а) $1/3 = 0{,}(3)$; б) $1/6 = 0{,}1(6)$; в) $7/30 = 0{,}2(3)$; г) $7/11 = 0{,}(63)$.

2. Найдите сотую цифру после запятой в десятичной записи числа $1/7$.

3. Разделите «уголком» число 1 на а) 9; б) 99; в) 9999999. г) Докажите общее правило: $1/\underbrace{99\ldots9}_{n} = 0{,}\underbrace{00\ldots0}_{n-1}1$.

[4] *Существуют и непериодические дроби, например, десятичная дробь 0,1010010001…, где количество нулей между единицами все время увеличивается на 1. Но в этой статье они никак не будут использованы.*

4. Проверьте равенства а) $0{,}(6) + 0{,}(5) = 1{,}(2)$; б) $0{,}(845) + 0{,}(49) = 1{,}(340795)$; в) $2{,}70(584) + 6{,}917(49) = 9{,}623(340795)$.

От периодической десятичной дроби – к обыкновенной

Пусть

$$x = 0{,}11111\ldots$$

Тогда

$$10x = 1{,}1111\ldots,$$

откуда

$$10x = 1 + x,$$

т.е. $x = 1/9$. Мы получили замечательный результат:

$$0{,}11111\ldots = 1/9.$$

Это равенство не приближенное, а *точное*: бесконечная десятичная периодическая дробь 0,(1) является в точности тем же самым числом, что и обыкновенная дробь $1/9$. (Между прочим, равенство $0{,}999\ldots = 1$ тоже абсолютно точное!)

Далее, пусть

$$y = 0{,}17331733173317331733\ldots$$

Тогда

$$10000y = 1733{,}1733173317331733\ldots,$$

откуда

$$10000y = 1733 + 0{,}1733173317331733\ldots = 1733 + y.$$

Из уравнения

$$10000y = 1733 + y$$

находим

$$9999y = 1733, \text{ т.е. } y = 1733/9999.$$

Если провести вычисления не для частных примеров, как это сделали мы, а в общем виде, то можно установить следующее правило:

Чисто периодическая правильная дробь равна такой обыкновенной дроби, в числителе которой – период, а в знаменателе – число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$, *где r – длина периода.*

Упражнения

5. Обратите в десятичные дроби числа а) $23/99$; б) $1234/999999$.

6. Обратите в обыкновенные дроби числа а) 0,(012); б) 3,1(3); в) 1,93(173).

7. Сумма (произведение, разность) двух периодических десятичных дробей – периодическая дробь. Докажите это.

8. Дана бесконечная десятичная непериодическая дробь. Докажите, что ее цифры можно переставить так, что получится периодическая дробь.

Предпериод

Если делить «уголком» 3 на 14, то зацикливание произойдет не сразу:

$$3/14 = 0{,}2(142857).$$

Период, заметим, такой же, как у дроби $1/7$. Это легко объяснить:

$$\frac{3}{14} = \frac{30}{14}:10 = \frac{15}{7}:10 = \left(2 + \frac{1}{7}\right):10,$$

а делить на 10 очень легко – достаточно перенести запятую на одну позицию.

В общем случае выделим в знаменателе степени двойки и пятерки, т. е. запишем дробь в виде $m/\left(2^a 5^b k\right)$, где a, b – неотрицательные целые числа, k – натуральное число, не кратное ни 2, ни 5. Обозначим наибольшее из чисел a, b буквой c и выполним преобразование:

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^c \cdot 5^c}{2^a 5^b k}:10^c = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k}:10^c.$$

Значит, для решения вопроса о длинах периодов десятичных дробей достаточно изучить дроби со знаменателями, не кратными ни 2, ни 5 (т.е. со знаменателями, взаимно простыми с числом 10).

Упражнения

9. Зная, что $1/13 = 0{,}(076923)$, запишите в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую дробь 0,(692307).

10. Зная, что $7/17 = 0{,}(4117647058823529)$, обратите в десятичные дроби числа а) $12/85$; б) $3/68$.

11*. а) Докажите, что длина наименьшего предпериода десятичного представления правильной несократимой дроби со знаменателем $n = 2^a 5^b k$, где a, b, k – целые неотрицательные числа, причем $\text{НОД}(k,10) = 1$, равна $c = \max(a,b)$.

б) Докажите неравенство $c \le \log_2 n$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 2^a$ и только для них.

в) Пусть хотя бы один делитель натурального числа n отличен от 2 и 5. Докажите неравенство $c \le \log_2(n/3)$ и убедитесь, что равенство достигается для чисел вида $n = 3 \cdot 2^a$ и только для них.

12*. Докажите, что если в периоде десятичного представления дроби m/n, где m и n – натуральные числа, встретилась последовательность цифр 167, то $n > 100$.

Числа вида 99...9

Взглянем на равенства $1/7 = 0,(142857)$ и $1/13 = 0,(076923)$. Заметьте:

$$142857 \cdot 7 = 999999$$

и

$$76923 \cdot 13 = 999999.$$

Это не случайность: как вы помните, в правиле преобразования чисто периодической дроби в обыкновенную фигурирует число $10^r - 1 = \underbrace{9\ldots9}_{r}$. Поэтому мы займемся числами этого вида.

Лемма 1. *Для всякого натурального числа k, не кратного ни 2, ни 5, существует такое натуральное число r, для которого разность $10^r - 1$ кратна n.*

Доказательство. *Первый способ* – для любителей многоточий. Рассмотрим k чисел: $9, 99, 999, \ldots, \underbrace{99\ldots9}_{k}$. Докажем, что хотя бы одно из них кратно k. Предположим противное: пусть ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k - 1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел нацело делится на k и представляет из себя несколько девяток, после которых написано несколько нулей:

$$\underbrace{99\ldots9}_{r+s} - \underbrace{99\ldots9}_{s} = \underbrace{99\ldots9}_{r}\underbrace{00\ldots0}_{s}.$$

Поскольку k взаимно просто с 10, из делимости числа $\underbrace{99\ldots9}_{r}\underbrace{00\ldots0}_{s}$ на k следует, что число $\underbrace{99\ldots9}_{r}$ нацело делится на k. Лемма доказана.

Второй способ – для тех, кто не любит многоточия. Рассмотрим числа $1, 10, 10^2, \ldots, 10^{k-1}$. Ни одно из них не кратно k. Поскольку количество ненулевых остатков от деления на k равно $k-1$, какие-то два из k рассматриваемых чисел дают одинаковые остатки при делении на k. Разность этих чисел:

$$10^{r+s} - 10^s,$$

где $0 \le s < r+s < k$, – нацело делится на k.

Из делимости произведения $10^s\left(10^r - 1\right)$ на k и из взаимной простоты чисел 10 и k следует, что $10^r - 1$ кратно k, т.е.

$$10^r - 1 = kt,$$

где t – натуральное число[5]. Доказательство завершено[6].

Упражнения

13. Сколько чисел, кратных 13, имеется среди первых ста чисел последовательности 1, 11, 111, ...?

14. Если число вида 11...1 кратно 7, то оно кратно и 11, и 13, и 15873. Докажите это.

15. Первую цифру k-значного числа, кратного 13, стерли и записали позади последней цифры этого числа. При каких k полученное число кратно 13? (Например, из кратных 13 чисел 503906 и 7969 таким образом получаем числа 39065 и 9697, первое из которых кратно 13, а второе – нет.)

16. Для каких пар натуральных чисел (m, n), где $n > 1$, число $1\underbrace{00\ldots0}_{m}1$ кратно числу $\underbrace{11\ldots1}_{n}$?

17. а) Если p – простое число и наименьший период десятичного разложения дроби $1/p$ состоит из $2n$ цифр, то сумма двух n-значных чисел (могущих начинаться и с нуля), образованных первыми n и последними n цифрами периода, равна $10^n - 1$. Докажите это. (Например, $1/13 = 0,(076923)$, при этом $76 + 923 = 999$. Простота знаменателя существенна: $1/21 = 0,(047619)$, но $47 + 619 \neq 999$.) б) Длина наименьшего периода десятичного представления дроби $1/p$, где p – простое число, четна в точности тогда, когда p является делителем некоторого числа вида $10^n + 1$. Докажите это.

18. а) Найдите длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/31$. б) Докажите, что никакое число вида 100...01 не кратно 31.

19 (М981). Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8; б) 128; в*) 1024 различных делителя.

Длина периода

Теорема 2. *Если m, n – взаимно простые натуральные числа, причем n взаимно просто с 10 и $m < n$, то в десятичном представлении дробь m/n является чисто периодической. Длина ее наименьшего периода – это такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно n.*

Доказательство. По лемме 1, $10^r - 1 = kt$ для некоторых натуральных чисел r и t. Следовательно,

$$\frac{m}{k} = \frac{mt}{kt} = mt \cdot \frac{1}{10^r - 1}.$$

Воспользовавшись равенством $1/(10^r - 1) = 0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1)$, получаем

$$\frac{m}{k} = mt \cdot 0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1).$$

Поскольку $m < k$, то $mt < kt < 10^r$, так что произведение числа mt на число $0,(\underbrace{00\ldots0}_{r-1}1)$ – это периодическая дробь, длина периода которой равна r, а период – десятичная запись числа mt, возможно, дополненная слева необходимым количеством нулей.

Нам осталось только понять, почему *наименьшему* возможному числу r соответствует наименьший возможный период. Но это сразу ясно из правила перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную.

Теорема 2 доказана. Она вполне ясно характеризует длину r периода чисто периодической десятичной дроби. А если есть предпериод, то надо вспомнить равенство

$$\frac{m}{2^a 5^b k} = \frac{m \cdot 2^{c-a} 5^{c-b}}{k} : 10^c,$$

и ответ станет очевиден:

Следствие теоремы 2. *Длиной наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n, где $n = 2^a 5^b k$, $a, b \ge 0$ и НОД$(k,10) = 1$, является такое наименьшее натуральное число r, что $10^r - 1$ кратно k.*

Следствие следствия теоремы 2. *Длина наименьшего периода десятичного представления несократимой дроби m/n зависит только от знаменателя n, а не от числителя m.*

Функция $L(n)$

Обозначим через $L(n)$ длину наименьшего периода десятичного представления дроби $1/n$ (см. таблицу 1). В силу следствия теоремы 2, если $n = 2^a 5^b k$, где $a, b \ge 0$ и НОД$(k,10) = 1$, то $L(n) = L(k) = r$, где r – это наименьшее натуральное число, для которого $10^r - 1$ кратно k.

Таблица 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$L(n)$	1	1	1	1	1	1	6	1	1	1	2	1	6	6	1	1	16

Функция L определена на всем множестве натуральных чисел[7], но в дей-

[5] *Например, для $k = 7$ можно взять $r = 6$; при этом $t = (10^6 - 1)/7 = 142857$.*

[6] *Между прочим, оно замечательно не только отсутствием многоточий, но и тем, что показывает: существует нужное нам число $r < k$, а не только $r \le k$.*

[7] *Напоминаем, что в доказательстве теоремы 1 мы договорились периодом конечной десятичной дроби считать число 1.*

ствительности интерес представляют только числа, взаимно простые с числом 10.

Очевидно, если $10^r - 1$ кратно каждому из двух взаимно простых натуральных чисел m и n, то $10^r - 1$ кратно и произведению mn. Следовательно, верна следующая теорема:

Если m, n – взаимно простые натуральные числа, то $L(mn) = НОК[L(m), L(n)]$.

Упражнения

20. Найдите длину наименьшего периода дроби

а) $19/42$;

б) $2000/(3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 1313)$.

21. Какой может быть длина периода суммы двух бесконечных десятичных периодических дробей, длины периодов которых равны а) 6 и 12; б) 12 и 20? (Пункты а) и б) составляют содержание задачи М1399.) в) Для любых двух натуральных чисел r и s через $f(r,s)$ обозначим произведение таких степеней p^a простых чисел, для которых ровно одно из чисел r, s кратно p^a и не кратно при этом степени p^{a+1}, а другое из чисел r, s не кратно числу p^a. (Например, $f\left(2^3 \cdot 3 \cdot 11^6, 2^4 \cdot 3 \cdot 11^2 \cdot 23\right) = 2^4 \cdot 11^6 \cdot 23$.) Докажите, что числу $f(r,s)$ кратна длина t наименьшего периода суммы любых двух десятичных дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s. г) Докажите, что длина наименьшего периода суммы двух периодических дробей является делителем наименьшего общего кратного длин их периодов. д) Пусть r, s, t – натуральные числа, причем t кратно числу $f(r,s)$ и является делителем числа НОК$[r,s]$. Приведите пример двух десятичных периодических дробей, длины наименьших периодов которых равны r и s, а длина наименьшего периода их суммы равна t.

Наблюдения Гаусса

Великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс, будучи гимназистом, обращал дроби вида $1/p$, где p – простое число, отличное от 2 и 5, в бесконечные десятичные дроби: в каждом случае он с поразительным терпением ожидал, когда знаки начнут повторяться. Ему хотелось понять, как зависит длина периода такой дроби от p.

Выписывание полного периода, скажем, для $p = 47$ – утомительное занятие (46 знаков!). Однако Гаусс не терял надежды и продолжал вычисления: он выписал периоды для всех простых чисел $p < 1000$. Главная закономерность, которую он обнаружил, состоит в том, что длина $L(p)$ наименьшего периода такой дроби является делителем числа $p - 1$, иногда совпадая с ним (см. таблицу 2). А именно, $L(p) = p - 1$ для $p = 7, 17, 23, 47, 59, 61, 97, 109, 113, 131, 149, 167, 179, 181, 193$ и некоторых других чисел [8].

Таблица 2

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
$L(p)$	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Мы докажем эту закономерность чуть ниже, а пока рассмотрим следующие разложения:

$$1/7 = 0,(142857),$$
$$2/7 = 0,(285714),$$
$$3/7 = 0,(428571),$$
$$4/7 = 0,(571428),$$
$$5/7 = 0,(714285),$$
$$6/7 = 0,(857142).$$

Периоды этих шести дробей начинаются сразу после запятой и получаются друг из друга циклическим сдвигом. Это могло бы показаться случайным курьезом, будь мы любителями «занимательной» математики. Но не будем столь наивны и внимательно рассмотрим этот эффект.

Возьмем вместо 7, например, 41. Очевидно,

$$1/41 = 0,(02439).$$

«Прокрутим» период:

$$0,(24390) = 10/41,$$

$$0,(43902)=10 \cdot 0,(24390) - 2 = \frac{100}{41} - 2 = 18/41,$$

$$0,(39024)=10 \cdot 0,(43902) - 4 = \frac{180}{41} - 4 = 16/41,$$

$$0,(90243) = 10 \cdot 0,(39024) - 3 = \frac{160}{41} - 3 = 37/41.$$

Получили цикл из пяти чисел: 1, 10, 18, 16, 37. Каждое число этого цикла – остаток от деления удесятеренного предыдущего на 41.

Если бы мы начали с $2/41 = 0,(04878)$, то получили бы другой цикл: $0,(48780) = 20/41$, $0,(87804) = 36/41$, $0,(78048) = 32/41$, $0,(80487) = 33/41$.

Всего для $p = 41$ получаем 8 циклов, по 5 дробей в каждом. В общем случае, если натуральное число n взаимно просто с 10 и отлично от 1, то все правильные несократимые дроби со знаменателем n разбиваются на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле. Значит, количество таких дробей кратно числу $L(n)$. (В частности, если p – простое число, то все дроби вида m/p, где $1 \le m < p$,– несократимые, откуда и следует обнаруженная юным Гауссом закономерность!)

[8] *Конечно или бесконечно множество чисел, для которых $L(p) = p - 1$, по сей день неизвестно.*

Упражнения

22. а) Решите ребус: ПЛОМБА · 5 = = АПЛОМБ. (Здесь в записях шестизначных чисел ПЛОМБА и АПЛОМБ разные буквы обозначают разные цифры.) б) Найдите шестизначное число, уменьшающееся в 5 раз при переносе первой цифры в конец числа. в) Решите ребус: НИКЕЛЬ · 6 = ЕЛЬНИК. (*Указание*. В словах ребуса использованы два слога: НИК и ЕЛЬ. Обозначьте НИК = x и ЕЛЬ = y.) г) Существует ли шестизначное число, которое при умножении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает числа, записанные теми же цифрами, что и само число, но в другом порядке? д) Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются в целое число раз при переносе последней цифры из конца в начало.

23. Пятизначное число делится на 41. Докажите, что если его цифры циклически переставить, то полученное число тоже будет делиться на 41.

24. Число оканчивается на 2. Если эту цифру перенести в начало числа, оно удвоится. Найдите наименьшее такое число.

25 * (М1252). Пусть a и n – натуральные числа, $a > 1$. Докажите, что количество правильных несократимых дробей со знаменателем $a^n - 1$ кратно n.

Теорема Эйлера

Количество правильных несократимых дробей со знаменателем n обозначают через $\varphi(n)$ (см. таблицу 3) [9]. Для любого простого числа p, очевидно, $\varphi(p) = p - 1$.

Таблица 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$\varphi(n)$	1	1	2	3	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16

Поскольку $\varphi(n)$ правильных несократимых дробей можно разбить на циклы по $L(n)$ дробей в каждом цикле, то верна следующая теорема:

Теорема 3. *Если n – натуральное число, то $\varphi(p)$ кратно числу $L(n)$.*

Следствие. *Если n – натуральное число, взаимно простое с числом 10, то $10^{\varphi(n)} - 1$ кратно n.*

[9] *Подробнее об этой функции можно прочитать в статье В.Сендерова и А.Спивака «Малая теорема Ферма» (см. «Квант» №1 за 2000 г.).*

Если бы мы рассматривали не десятичную систему счисления, а систему счисления с основанием a, где a – отличное от единицы натуральное число, то аналогичным образом получили бы утверждение, которое называют теоремой Эйлера:

Если n – натуральное число, взаимно простое с целым числом a, где a > > 1, то $a^{\varphi(n)} - 1$ *кратно n.* [10]

Чему равно $L(p^m)$?

Число 111 делится на 3. Далее, число

$$111111111 = 111 \cdot 1001001$$

делится на 9 как произведение двух чисел, каждое из которых делится на 3.[11] Записываемое 27 единицами число

$$111111111111111111111111111 =$$
$$= 111111111 \cdot 1000000001000000001$$

делится на 27 как произведение числа, кратного 9, и числа, кратного 3.

И вообще, равенство

$$\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n}\underbrace{111\ldots11}_{3^n} = \underbrace{111\ldots11}_{3^n} \cdot 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1$$

показывает, что если число, записываемое 3^n единицами, кратно 3^n, то число, записываемое 3^{n+1} единицами, кратно 3^{n+1}.

[10] *Честно говоря, условие a > 1 излишне: если нас интересуют остатки от деления на n, то из любого целого числа a, прибавив к нему n необходимое количество раз, можно получить число, большее единицы.*

[11] *Впрочем, можно было воспользоваться признаком делимости на 9.*

Таким образом по индукции можно доказать, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n}$ кратно числу 3^n, т.е. число $\underbrace{99\ldots99}_{3^n}$ кратно числу 3^{n+2}, откуда $L(3^{n+2}) \le 3^n$. А если мы еще заметим, что использованные нами числа 100…00100…001 делятся только на 3, но не на 9, то получим точный результат: $L(3^{n+2}) = 3^n$.

Нельзя ли подобным образом изучить функцию $L(p^m)$, где p – простое число, m – натуральное число? Оказывается, можно.

Теорема 4. *Если p^k – наивысшая степень простого числа p, которой кратно число $10^{L(p)} - 1$, то для любого неотрицательного целого числа m верна формула $L(p^{k+m}) = p^m L(p)$. (Например, $L(3^{m+2}) = 3^m$ и $L(7^{m+1}) = 6 \cdot 7^m$.)*

Доказать теорему 4 вам поможет следующая лемма.

Лемма 2. *Если $a = 1 + px$, где p – простое число, p > 2, x – целое число, то сумма $a^{p-1} + a^{p-2} + \ldots + a + 1$ кратна p, но не кратна p^2.*

Доказательство леммы 2. Легко понять (рассуждая по индукции или применив бином Ньютона), что при делении на p^2 числа a, a^2, …, a^{p-2} и a^{p-1} дают такие же остатки, как $1 + px$, $1 + 2px$, …, $1 + (p-2)px$ и $1 + (p-1)px$. Следовательно,

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-2} + a^{p-1} \equiv$$
$$\equiv 1 + (1+px) + (1+2px) + \ldots$$
$$\ldots + (1+(p-2)px) + (1+(p-1)px) =$$
$$= p + px\frac{p(p-1)}{2} \equiv p \pmod{p^2}.$$

Лемма доказана. А теорему докажите в качестве (трудного, но не слишком) упражнения (29).

Упражнения

26. Число $10^{3^n} - 1$ кратно 3^{n+2}, но не кратно 3^{n+3}. Докажите это.

27. Какое наименьшее количество единиц подряд надо написать, чтобы получилось число, кратное а) 999 999 999; б) 9^9; в) 11^{11}; г) $3^k 7^l$, где k, l – натуральные числа?

28. На какую наибольшую степень двойки делится число $5^{2000} - 1$?

29. Докажите теорему 4.

30. Докажите, что если p – простое число, $p \ne 2$, то сумма $1 + a + a^2 + \ldots + a^{p-1}$ не кратна p^2 ни для какого целого числа a.

31. Докажите, что в периоде бесконечной десятичной дроби $1/3^{100}$ имеется любая последовательность из 46 цифр. (Чуть в иной формулировке эта задача была в «Задачнике «Кванта» под номером М1280.)

32 (для тех, кто любит программировать). а) Найдите хотя бы одно такое простое число $p > 5$, что длины периодов разложений в десятичные дроби чисел $1/p$ и $1/p^2$ совпадают и равны $p - 1$. б*) Найдите еще одно такое простое число. (Неизвестно, бесконечно ли множество простых чисел со свойством $L(p) = L(p^2)$. Неизвестно и то, существует ли хотя бы одно простое число $p > 5$, для которого $L(p) = L(p^3)$.)

НАМ ПИШУТ

Заглянем в центр звезд

Просматривая таблицу «Физические параметры некоторых звезд» (которая частично здесь приводится) из «Справочника по физике» А.С.Еноховича, трудно удержаться от попытки оценить температуру в центрах звезд и сравнить ее с реальной.

Будем считать, в первом приближении, звезду водородной. Поскольку она находится в равновесии, разумно приравнять, по порядку величины, средние энергии протона – теплового движения и гравитационного взаимодействия: $kT \sim GMm_p/d$. Здесь k – постоянная Больцмана, T – температура звезды, G – гравитационная постоянная, M и d – масса и диаметр звезды, m_p – масса протона. Имеем расчетную формулу $T \sim \frac{GMm_p}{kd}$, на основании которой строим пятую графу таблицы. Сравнив ее со второй графой, видим достаточно хорошее совпадение.

Звезда	T, К	d (по сравнению с Солнцем)	M (по сравнению с Солнцем)	Вычисленная температура, К
τ Ориона	$5{,}4 \cdot 10^7$	7	27	$4{,}47 \cdot 10^7$
Спика (α Девы)	$3 \cdot 10^7$	5	11	$2{,}55 \cdot 10^7$
Вега (α Лиры)	$1{,}8 \cdot 10^7$	2,2	2,8	$1{,}48 \cdot 10^7$
Процион А	$8 \cdot 10^6$	1,8	1,2	$7{,}73 \cdot 10^6$
α Центавра А	$1{,}3 \cdot 10^7$	1,0	1,0	$1{,}16 \cdot 10^7$
ξ Волопаса В	$1{,}0 \cdot 10^7$	0,65	0,58	$1{,}03 \cdot 10^7$
Крюгер 60 А	$8{,}5 \cdot 10^6$	0,41	0,30	$8{,}48 \cdot 10^6$

В.Дроздов