Качающаяся скала

А. МИТРОФАНОВ

...много есть странных
вещей в горах.
Александр Грин

«НАДО СКАЗАТЬ, ЧТО В ЭТИХ местах не редкость встретить так называемую «качающуюся скалу» – весьма любопытное явление, суть которого в том, что отдельный кусок скалы в незапамятные времена получает устойчивость равновесия. Он обыкновенно стоит на каменной площадке и, если его раскачивать, он, подобно «ванькевстаньке», принимает первоначальное положение. Такие скалы весят иногда тысячи тонн, но послушны движению руки человека средней силы. Такая скала упасть не может, если, конечно, ее не взорвут динамитом...» – это строки из рассказа Александра Грина «Качающаяся скала», грустной истории о бедном охотнике, которому предложили за три миллиона опрокинуть огромный каменный столб, качающийся около положения равновесия. Охотник, несмотря на все свои усилия, не справился с задачей и сошел с ума (но не оставил своей затеи столкнуть камень).

Попробуем разобраться, почему же так устойчива «качающаяся скала».

Мы знаем, что для того чтобы тело находилось в положении равновесия, должны выполняться два условия:

векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю; (а)

алгебраическая сумма моментов всех сил относительно произвольной оси равна нулю. (б)

Не всякое положение равновесия бывает устойчивым. Например, иголка, на которую действуют только силы тяжести и реакции опоры, не стоит свободно на гладком столе. Хотя, если иголку поставить строго вертикально, условия (а) и (б) будут выполняются, но при малейшем отклонении от вертикали возникают моменты сил, опрокидывающие иголку. В то же время кирпич стоит устойчиво на любой грани. И как бы мы не уменьшали кирпич, сохраняя его форму, кирпич по-прежнему будет стоять на столе устойчиво. А вот на кривой выпуклой поверхности,

Иллюстрация В.Власова

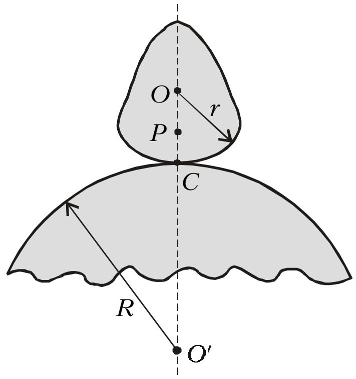

Рис.1

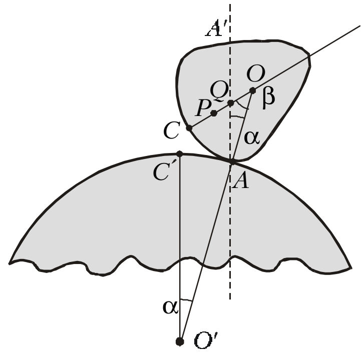

Рис.2

например на футбольном мяче, кирпич труднее уравновесить, чем на плоскости или вогнутой поверхности. Таким образом, устойчивость равновесия тела на опоре зависит от формы тела (точнее – его основания) и от поверхности опоры.

Чтобы вывести критерий устойчивости, обратимся снова к качающейся скале или к камню и рассмотрим случай, когда камень и опора в области соприкосновения имеют сферическую форму. (В Приложении к статье вводится понятие кривизны поверхности и рассматривается решение этой задачи для тел произвольной формы.) Будем предполагать, что камень и опора, на которой он стоит, сточились или обветрились и стали гладкими, без сколов и выступов, так что область контакта камня с опорой мала и может быть принята за точку. На рисунке 1 показано сечение камня и опоры вертикальной плоскостью, проходящей через точку их соприкосновения (точка C); здесь O и O' – центры сферических поверхностей камня и опоры в области контакта, r и R – их соответствующие радиусы. Для равновесия камня необходимо прежде всего, чтобы его центр тяжести (точка P) лежал на вертикали OO'; при этом условия (а) и (б) выполняются. Посмотрим, к чему приведет небольшое отклонение камня от первоначального положения.

Пусть в результате отклонения положение камня на опоре стало таким, как на рисунке 2; здесь Q – точка пересечения прямой PO с вертикалью, проходящей через точку A – новую точку контакта камня с опорой. Если точка P окажется правее вертикали AA', то момент силы тяжести относительно точки опоры A будет способствовать дальнейшему отклонению, и камень уже не вернется в первоначальное положение. Если же точка P окажется левее вертикали AA', момент силы тяжести будет возвращать камень в первоначальное положение. А это значит, что равновесие камня будет устойчивым.

Итак, если $CP < CQ$, то равновесие устойчивое. Посмотрим, как при этом связаны между собой величины CP, R и r. В треугольнике OAQ (см. рис.2)

$$\beta = \frac{CA}{r} = \frac{C'A}{r} = \alpha\frac{R}{r}$$

(так как углы малы). По теореме синусов имеем

$$\frac{OQ}{\sin\alpha} = \frac{r}{\sin\left(\pi - (\alpha+\beta)\right)} = \frac{r}{\sin\left(\alpha + \alpha\frac{R}{r}\right)}. \quad (1)$$

Нас интересуют малые отклонения камня от положения равновесия. Говоря «малое отклонение», мы имеем в виду, что расстояние, «проходимое» точкой контакта на поверхности опоры, т.е. дуга $C'A$ (и, следовательно, дуга CA, равная $C'A$), мало по сравнению с радиусами r и R поверхностей камня и опоры. А это и означает, что углы α и β малы, т.е.

$$\alpha \ll 1 \text{ и } \beta = \alpha\frac{R}{r} \ll 1.$$

Для малых углов, как известно, синус угла с хорошей точностью равен самому углу. Поэтому выражение (1) можно записать так:

$$\frac{OQ}{r} = \frac{1}{1+R/r}, \text{ или } OQ = \frac{r^2}{R+r}.$$

Так как

$$CQ = r - OQ = \frac{Rr}{R+r},$$

условие устойчивого равновесия камня, т.е. условие $CP < CQ$, записывается в виде неравенства

$$CP < \frac{Rr}{R+r}. \quad (2)$$

Если поверхность опоры имеет вогнутую форму с радиусом R (форму внутренней поверхности сферы радиусом R), то условие устойчивого равновесия камня на опоре выглядит так:

$$CP < \frac{Rr}{R-r}. \quad (3)$$

(Попробуйте вывести эту формулу самостоятельно.)

Отметим теперь следующее важное обстоятельство. Допустим, что равновесие камня на опоре устойчивое. Тогда при отклонении камня от положения равновесия возникает момент силы, препятствующий этому отклонению: у силы тяжести относительно новой точки опоры появляется плечо (см. рис.2). Чтобы удержать камень в новом положении неподвижным, требуется приложить внешнюю силу, такую, чтобы ее момент относительно новой точки опоры был равен по величине и противоположен по направлению моменту силы тяжести; величина и направление этой силы определяются условием (а). Следовательно, даже для небольшого отклонения тела от положения устойчивого равновесия необходимо совершить работу против силы тяжести. Эта работа идет на увеличение потенциальной энергии тела. А это означает, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела имеет минимальное значение, или, что то же самое, центр тяжести тела занимает наинизшее положение. Поэтому условие (2) можно вывести иначе, посмотрев, что происходит с центром тяжести камня при его небольшом отклонении (см. упражнение 1). Такие два различных подхода к решению проблемы устойчивости эквивалентны. Если камень слегка отклонить от положения устойчивого равновесия и не удерживать его в новом положении, он вернется назад, «проскочит» (по инерции) положение равновесия, снова вернется к нему и т.д., т.е. камень будет совершать колебания около положения устойчивого равновесия.

Если небольшое отклонение тела от положения равновесия приводит к тому, что центр тяжести его опускается, равновесие тела неустойчиво. При малейшем отклонении возникает момент силы тяжести, действующей в сторону отклонения и стремящийся его увеличить, и тело «опрокидывается».

Бывают случаи, когда отклонение тела от положения равновесия не изменяет высоту центра тяжести тела над точкой опоры, – такое положение называют безразличным равновесием. В безразличном равновесии находится, например, однородный шарик на горизонтальной плоскости. Заметим, что когда равновесие безразличное, а тело и опора в области контакта имеют сферические формы, выполняется равенство

$$CP = \frac{Rr}{R+r}, \qquad (4)$$

которое справедливо и для однородного шарика на горизонтальной плоскости, если считать, что $R \to \infty$. Но будет ли это соотношение достаточным условием безразличного равновесия? Оказывается, нет. Приведем хотя бы один пример, когда условие (4) выполняется, а равновесие тела неустойчивое. Рассмотрим тело шарообразной формы на вершине закрепленной сферы того же радиуса, при условии, что центр тяжести тела находится на половине его радиуса r, т.е. $CP = r/2$. Нетрудно показать (проделайте это самостоятельно), что равновесие тела на сфере неустойчивое, хотя соотношение (4) строго выполняется. При любом конечном угле наклона тела от равновесного положения центр тяжести тела опускается, и оно скатывается со сферы (см. упражнение 2).

Обратим внимание на то, что при выводе критерия устойчивости мы рассматривали малые отклонения тела от положения равновесия и учитывали в расчетах лишь линейные члены, пропорциональные α. В линейном приближении тело или система тел могут находиться в безразличном равновесии, но когда мы при более точных расчетах учитываем члены высших порядков, например пропорциональные α^2, α^3 и т.д., то равновесное положение по расчетам оказывается неустойчивым, что и наблюдается на практике.

Теперь нам понятно, что такое «качающаяся скала»: это вертикально стоящий камень с низко расположенным центром тяжести или большим радиусом кривизны основания. Отклонение камня (правда, в некоторых пределах; см. упражнение 2) приводит к его колебаниям около положения равновесия. Качающаяся скала – это камень-маятник.

Конечно, нелегко рукой «средней силы» расшатать огромный каменный столб. Дело не только в том, что у качающейся скалы большая масса и, для того чтобы сообщить ей заметное ускорение, нужно приложить очень большую силу. Из-за деформации опоры под действием веса камня могут возникать силы реакции, препятствующие отклонению скалы от вертикали. И тем не менее, качающиеся скалы или, по крайней мере, большие качающиеся камни (rocking stones) существуют в природе. Может быть, и вы среди каменных валунов встречали нечто подобное?

Рассказ А.Грина «Качающаяся скала» появился в 1915 году в журнале «20 век». Откуда Грин узнал о качающейся скале? По всей видимости, первоисточником для него послужила книга Я.И.Перельмана «Занимательная физика», первое издание которой вышло в свет в 1913 году и сразу же стало ошеломляюще успешным. Перельман поместил в этой книжке коротенькую заметку о качающейся скале, находящейся в окрестностях аргентинского морского порта Бахия-Бланка (рис.3). Особенностью качающейся скалы из Бахия-Бланки было ее непрерывное медленное движение из стороны в сторону, предположительно из-за неоднородного нагрева скалы солнечными лучами или охлаждения, которые приводили к небольшому блужданию положения центра тяжести. Жаль, что этот забавный сюжет выпал из более поздних изданий «Занимательной физики».

Рис.3

Рассмотрим теперь примеры, которые не требуют путешествия в горы, но по своей природе они такие же, как качающаяся скала.

Пример 1. У однородного шара центр тяжести совпадает с геометрическим центром, поэтому шар неустойчив на выпуклой поверхности. Однако, если у шара срезана «верхушка», он может стоять устойчиво на вершине выпуклой поверхности (см. упражнение 3).

Пример 2. Забавная детская игрушка «ванька-встанька» напоминает пример 1. Кусок свинца или стали, спрятанный у шарообразного основания «ваньки-встаньки», придает игрушке удивительную устойчивость.

А все ли знают, что у «ваньки-встаньки» были (а может быть, есть кое-где и сейчас) родственники? «Было когда-то на свете двадцать пять оловянных солдатиков. Все они были сыновьями одной матери – старой оловянной ложки – и, значит, приходились друг другу родными братьями. Они были очень красивы: ружье на плече, грудь колесом, мундир красный с синим. Чудо, что за солдатики...» Это – стойкие оловянные солдатики из сказки Андерсена. Почему их называли «стойкими»? Наверное, потому, что как бы их ни наклоняли, они всегда возвращались в вертикальное положение. Когда открывали коробку, в которую были уложены такие солдатики, все они вскакивали словно по команде. Каждый солдатик крепился на гладком срезе свинцовой полусферы и стоял удивительно устойчиво.

Пример 3. Как известно, однородный эллипсоид вращения (или вытянутый сфероид), т.е. тело вращения кривой $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ вокруг большой оси $X(a > b)$, не может стоять вертикально на плоскости стола: радиус кривизны в вершине эллипсоида, или, что то же самое, радиус сферы, которая аппроксимирует форму поверхности тела в вершине, равен b^2/a, в то время как центр тяжести находится на высоте, равной a. Критерий устойчивости (2) не выполняется. Но что будет, если чуть-чуть изменить форму эллипсоида? Датский математик Пит Хайн придумал тело вращения кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2,5}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2,5}=1$$

(для отрицательных x и y в этой формуле берутся значения модуля). При удачном подборе высоты a и ширины b (например, 5 и 4 см соответственно) так называемый суперэллипсоид Хайна стоит устойчиво на горизонтальной плоскости на любом из своих полюсов.

Можно показать, что этим же свойством устойчивости обладает всякое однородное тело вращения кривой $(x/a)^n+(y/b)^n=1$ вокруг оси X, если $n>2$ и $a>b>0$. При больших n тело похоже на цилиндр с закругленным дном и верхом – чем не подходящая модель качающейся скалы? И экспериментировать с искусственной скалой куда легче, чем с настоящей. Правда, верно и то, что «лучше гор могут быть только горы...» и что очень интересно раскачивать настоящие каменные валуны на свежем воздухе в русле какой-либо пересохшей горной речки.

В заключение отметим, что проблема устойчивости равновесия тел – очень старая проблема, которой занимались ученые прошедших эпох. Так, Э.Торричелли в 1644 году сформулировал критерий устойчивого равновесия системы двух тел в поле тяжести, который Х.Гюйгенс обобщил на систему из нескольких тел (принцип Торричелли). В 1788 году Ж.Лагранж доказал теорему, определяющую достаточность условия равновесия систем; более строгое доказательство этой теоремы принадлежит П.Дирихле. Согласно теореме Лагранжа–Дирихле, если потенциальная энергия изолированной системы в положении равновесия имеет минимум, то положение равновесия системы устойчивое.

Примечание (о теореме Эйлера)

В статье мы рассмотрели случай, когда скала и опора в области контакта имели сферическую форму. Вообще говоря, камни, даже гладкие, вовсе не обязаны быть шарами или иметь сферические основания. Как же тогда рассматривать задачу об устойчивости равновесия скалы? Здесь нам на помощь придет простая геометрическая идея, состоящая в том, что любую плоскую гладкую кривую в какой-либо произвольной точке A можно аппроксимировать некоторой окружностью, радиус которой называется радиусом кривизны кривой в точке A. Тогда задача про качающуюся скалу, когда камни не круглые, сведется опять к исследованию равновесия круглых тел. Итак, по порядку.

Чтобы количественно оценить роль формы тела в области контакта с опорой, определим некоторые понятия. Пусть в плоскости XY дана кривая l, A – точка на этой кривой, A_1 – близкая к ней точка, так что Δl – длина дуги AA_1, $\Delta\theta$ – угол между касательными к кривой в точках A и A_1. Отношение $\frac{\Delta\theta}{\Delta l}$ называется средней кривизной на участке AA_1, а предел этого отношения, когда точка A_1 приближается к A, обозначается $\frac{1}{\rho_A}$ и называется кривизной кривой в точке A:

$$\frac{1}{\rho_A}=\lim\frac{\Delta\theta}{\Delta l_A}\ \text{при}\ \Delta l_A\to 0.$$

Кривизна имеет размерность, обратную длине, а величина ρ_A по определению является радиусом кривизны кривой в точке A. Окружность радиусом ρ_A, проведенная через точку A и любые другие две близлежащие к ней точки кривой l, называется соприкасающей окружностью, а центр окружности O_A называется центром кривизны кривой l в точке A.

Нетрудно догадаться, что определенное таким образом понятие кривизны линии позволяет судить количественно, сколь сильно изогнута кривая в заданной точке, или, другими словами, сколь сильно она отличается от прямой линии. У прямой кривизна равна нулю ($\Delta\theta=0$). Для окружности (радиусом R) $\Delta l = R\Delta\theta$, т.е. это кривая с постоянным радиусом кривизны $\rho=R$, а кривизна окружности есть величина, обратная радиусу.

Как правило, кривизна кривой изменяется от точки к точке. Например, у так называемой параболы Нейля, описываемой уравнением $y=x^{3/2}$, радиус кривизны в точке $x=0$ равен 0 и быстро растет с увеличением x по формуле $R=\sqrt{x}(4+9x)^{3/2}/6$. У обычной параболы $y=x^2$ $R=\left(1+4x^2\right)^{3/2}/2$.

Для тех, кто знаком с правилами дифференцирования, укажем, что если кривая l задана уравнением $y=y(x)$, то $\frac{1}{\rho(x)}=\frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$, где y' и y'' – первая и вторая производные функции $y(x)$ по x.

С помощью понятия кривизны линии можно определить кривизну какой-либо поверхности S в данной точке C. Проведем в точке C касательную к поверхности плоскость P. Любая другая плоскость L, проходящая через C и перпендикулярная плоскости P, пересечет поверхность S по некоторой кривой l_L, имеющей в точке C радиус кривизны R. Эта кривая называется нормальным сечением поверхности S. Ясно, что значения R могут быть, вообще говоря, различны для разных нормальных сечений. Наибольшее и наименьшее значения R среди всех возможных называются главными радиусами кривизны R_1 и R_2 поверхности S в точке C, причем соответствующие им плоскости L_1 и L_2 всегда перпендикулярны друг другу, а кривизна $1/R$ произвольного нормального сечения выражается через R_1 и R_2 по формуле

$$\frac{1}{R}=\frac{\cos^2\varphi}{R_1}+\frac{\sin^2\varphi}{R_2},$$

где φ – угол, образованный рассматриваемым нормальным сечением с плоскостью L_1. Это утверждение носит название теоремы Эйлера, вернее – это ее современная формулировка.

Теорема Эйлера указывает путь, как искать решение задачи для камней неправильной формы, когда главные радиусы кривизны R_1, R_2 и r_1, r_2 в точке контакта не равны попарно друг другу.

Попробуйте теперь, например, сформулировать критерий устойчивости скалы, когда скала и опора – выпуклые валуны неправильной формы.

Упражнения

1. Выведите условие (2), используя тот факт, что в положении устойчивого равновесия потенциальная энергия тела минимальна.

2. «Ванька-встанька» стоит на вершине неподвижного шара. Радиусы шара и основания «ваньки-встаньки» одинаковы и равны r. Максимальный угол, на который можно отклонить от вертикали игрушку так, чтобы она не упала с шара, равен α_0 (проскальзывания нет). Найдите, где расположен центр тяжести «ваньки-встаньки».

3. Полушарие радиусом r стоит устойчиво на неподвижном шаре радиусом R, если выполняется условие $r<0{,}6R$. Где расположен центр тяжести полушария?

4. При выводе формулы (2) предполагалось, что движение камня – это качение по поверхности опоры. Допустим, что трение уменьшилось настолько, что качение стало сопровождаться проскальзыванием. Как это отразится на устойчивости равновесия камня?

5. Возможно ли опрокинуть качающуюся скалу?