

Сюрпризы таблицы умножения

Впервые таблица Пифагора примерно в таком виде, в каком мы ее находим на обложках тетрадей, появилась в сочинении неопифагорейца Никомаха Герасского (I–II вв.). В его «Введении в арифметику» таблица выполнена в ионийской нумерации. По словам Никомаха, эта таблица восходит «к самому Пифагору».

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.1. Таблица Пифагора

Более древние таблицы умножения обнаружены в месопотамских глиняных табличках – их «возраст» около 5 тысяч лет.

Таблица умножения скрывает в себе множество замечательных математических закономерностей, поиск которых может превратиться в увлекательное занятие, сулящее немало сюрпризов.

Назовем *квartetом* четыре числа таблицы Пифагора, расположенных в вершинах некоторого квадрата. Оказывается, что если стороны этого квадрата параллельны диагоналям таблицы Пифагора, то суммы диагональных чисел квартета равны (рис.2). Если стороны квадрата параллельны сторонам таблицы, то равны произведения диагональных чисел квартета. Если при этом квадрат расположен симметрично главной диагонали таблицы Пифагора, то сумма всех чисел квартета – квадрат некоторого натурального числа, и это свойство является хорошей иллюстрацией тождества: $(a+b)^2 =$

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$6 + 18 = 4 + 20, \quad 6 \cdot 30 = 12 \cdot 15, \\ 7^2 + 2 \cdot 7 \cdot 9 + 9^2 = 256$$

Рис.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$20 = (9 + 12 + 24 + 35) : 4$$

Рис.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

$$S_1 = 12 \cdot 13 = 156, \quad S_2 = 7,5 \cdot 6,5 \cdot 12 = 585$$

Рис.4

$= a^2 + 2ab + b^2$. Доказательства этих свойств просты и основаны на определении таблицы Пифагора, а

именно: каждое число таблицы равно произведению номера строки и номера столбца, на пересечении которых оно стоит.

Если центром квартета тоже является число таблицы Пифагора, то оно равно среднему арифметическому чисел этого квартета (рис.3). И опираясь на это свойство, легко доказать, что сумма всех чисел таблицы Пифагора, расположенных внутри центрально-симметричной фигуры показанного на рисунке 4 вида, равна произведению центрального числа на количество чисел фигуры. При отсутствии центрального числа вместо него берется дробное число, равное произведению гипотетических дробных номера строки и номера столбца.

Скучную, на первый взгляд, задачу вычисления суммы всех чисел таблицы Пифагора можно решить, получив при этом немалое удовольствие: поскольку $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, то сумма чисел таблицы будет равна

$$1 \cdot 45 + 2 \cdot 45 + 3 \cdot 45 + \dots + 9 \cdot 45 = \\ = 45 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = \\ = 45 \cdot 45 = 2025.$$

Красиво, не правда ли?

Заметим также, что все числа таблицы Пифагора можно разбить на девять групп по девять чисел в каждой так, что произведения чисел в каждой группе окажутся равными (рис.5). Разбивая числа на группы, нужно соблюдать правило: числа одной группы должны стоять в клетках таблицы так, чтобы установленные на них шахматные ладьи были дружелюбными, т.е. не угрожали друг другу. В этом случае все девять произведений будут равны

$$(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9)^2 = (9!)^2.$$

На рисунке 6 в таблице Пифагора выделены «уголки». Суммы чисел в уголках образуют последо-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.5

вательность кубов натуральных чисел.

Не нарушая принципиального построения таблицы Пифагора, ее

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Рис.6

можно расширить вправо и вниз, соблюдая основное условие: каждое число таблицы есть произведение номера строки и номера столбца, в которых оно стоит. На рисунке 7 изображена верхняя часть расширенной таблицы Пифагора, повернутая на 45°. Естественно, все ранее сформулированные свойства таблицы Пифагора остаются верными и для расширенной таблицы, поэтому в дальнейшем расширенную таблицу также будем называть таблицей Пифагора.

Рассмотрим колонки чисел, расположенных параллельно биссектрисе «числового угла» (рис.8). На самой биссектрисе расположе-

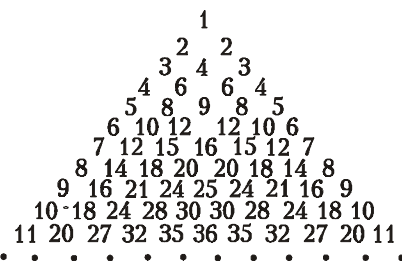


Рис.7

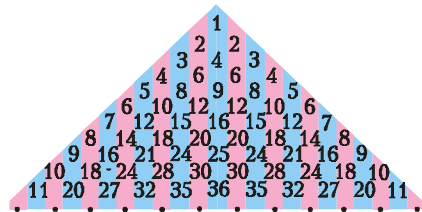


Рис.8

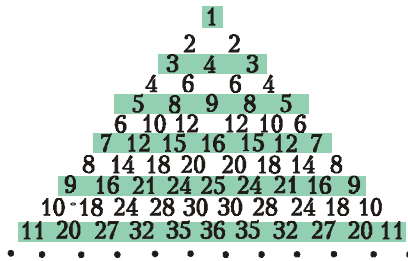


Рис.9

на последовательность квадратных чисел, а параллельно и рядом с ней расположены удвоенные треугольные числа. (Напомним, что треугольными называют числа, показывающие, из скольких кругов можно сложить треугольник: 1, 3, 6, 10, 15, ..., $\frac{n(n+1)}{2}$, ...). Во всех красных колонках расположены числовые последовательности, свя-

$$5 + 8 + 9 + 8 + 5 = 1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 =$$

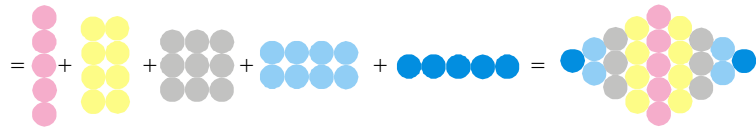


Рис.10

занные с треугольными числами, а в синих колонках – с квадратными числами. Попробуйте установить эту связь самостоятельно.

Группы чисел 1; 2,2; 3,4,3; 4,6,6,4; ... назовем *строками расширенной таблицы Пифагора* (рис.9). Произведение чисел n -й строки равно $(n!)^2$, потому что числа этой строки можно представить в таком виде: $1n, 2(n-1), 3(n-2), \dots, (n-2)3, (n-1)2, n1$, а произведение таких чисел равно $(n!)^2$.

Сумма чисел n -й строки таблицы Пифагора равна n -му тетраэдральному числу и может быть вычислена по фор-

муле $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. (Тетраэдральными числами называют числа, показывающие, из скольких шаров можно сложить треугольную пирамиду.) На рисунке 10 показан процесс рождения тетраэдрального числа из чисел 5-й строки.

Сумма же всех чисел n первых строк таблицы равна n -му гипертетраэдральному числу $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$ (аналог треугольных чисел для пространства четырех измерений).

Как вы уже успели, наверное, заметить, в свойствах этой таблицы тесно переплетаются треугольные и квадратные числа. Вот еще одно свойство: разность между суммами n -й и $(n-1)$ -й строк таблицы равна n -му треугольному числу, а разность между суммами n -й и $(n-2)$ -й строк равна n -му квадратному числу.

Умножение в шутку и всерьез

1. Сколько будет: два десятка умножить на три десятка?
2. Одно яйцо варят три минуты. Сколько минут надо варить 5 яиц?

3. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, записывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных – минус. Зависит ли последний оставшийся на доске знак от того, в каком порядке стирать знаки?

Н.Авилов

