$K_1 = \frac{3}{2}$, т.е. четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $M_1M_2M_3M_4$.

Теперь докажем, что четырехугольник $M_1 M_2M_3M_4$ гомотетичен исходному четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Поместим в вершинах четырехугольника $ABCD$ равные точечные массы. Центр масс системы A, B, C находится в точке M_1, поэтому центр масс системы A, B, C, D лежит на отрезке DM_1 и делит этот отрезок в отношении 3:1 (считая от точки D). Иными словами, точка M_1 гомотетична точке D с центром гомотетии, совпадающим с центром масс системы A, B, C, D, и коэффициентом гомотетии $K_2 = -\frac{1}{3}$.

Такое же заключение можно сделать и в отношении остальных вершин четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$.

Следовательно, четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ гомотетичен четырехугольнику $ABCD$ с коэффициентом гомотетии $K = K_1 \cdot K_2 = -\frac{1}{2}$, поэтому около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$ можно описать окружность. Пусть I – центр этой окружности. Ее радиус равен половине радиуса окружности, описанной около четырехугольника $ABCD$, так как $K = -\frac{1}{2}$. Но таковы же радиусы всех четырех окружностей Эйлера, т.е. их центры лежат на окружности того же радиуса, поэтому все окружности Эйлера проходят через точку I.

Нетрудно доказать, что центр масс системы A, B, C, D (или, что то же самое, точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, и отрезка, соединяющего середины его диагоналей) находится на середине отрезка OI.

Пусть M – указанный центр масс, N – центр окружности, описанной около четырехугольника $M_1M_2M_3M_4$. По доказанному выше, точка N гомотетична точке O с центром гомотетии в точке M и коэффициентом гомотетии $-\frac{1}{3}$. Это утверждение можно записать иначе: точка N гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3}$.

В то же время, точка I гомотетична точке N с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{3}{2}$.

Следовательно, точка I гомотетична точке M с центром гомотетии в точке O и коэффициентом гомотетии $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} = 2$.

Так как точка N делит отрезок OI в отношении 2:1 (считая от точки O), то точка N – центр гомотетии, переводящей четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$.

И.Вайнштейн

М1686. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке [0; 1] и удовлетворяют равенствам*

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$$

и

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}\,dx = \sqrt{2}.$$

Докажите, что $f(x) = g(x)$ на отрезке [0; 1].

Для любой пары неотрицательных чисел a и b справедливо элементарное неравенство $a + b \le \sqrt{2\left(a^2 + b^2\right)}$. При этом неравенство обращается в равенство лишь тогда, когда $a = b$. Ввиду этого и условий задачи, можно записать цепочку неравенств

$$2 \le \int_0^1 \left(|f(x)| + |g(x)|\right)dx \le \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x)}dx = 2.$$

Отсюда следует, что функции $f(x)$ и $g(x)$ равны и неотрицательны на отрезке [0; 1].

Подобным образом читатель может доказать аналогичное утверждение для трех (и более) функций: если $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке [0; 1] и

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx = 1,$$

а

$$\int_0^1 \sqrt{f^2(x) + g^2(x) + \varphi^2(x)}dx = \sqrt{3},$$

то

$$f(x) = g(x) = \varphi(x) \text{ на } [0,\ 1].$$

В.Произволов

М1687. *Будем называть размером прямоугольного параллелепипеда сумму трех его измерений – длины, ширины и высоты. Может ли случиться, что в некотором прямоугольном параллелепипеде поместится больший по размеру прямоугольный параллелепипед?*

Ответ: не может.

Пусть мы имеем прямоугольный параллелепипед P', лежащий внутри прямоугольного параллелепипеда P. Оценим двумя способами сумму l длин проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на три прямые, параллельные ребрам параллелепипеда P.

С одной стороны, сумма проекций трех взаимно перпендикулярных ребер параллелепипеда P' на любое ребро параллелепипеда P не превосходит длины этого ребра. Действительно, проекция внутреннего параллелепипеда на любое ребро внешнего есть отрезок, концы которого – это проекции двух противоположных вершин. От одной из них до другой можно пройти по трем взаимно перпендикулярным ребрам. Поэтому рассматриваемая проекция равна сумме проекций этих трех ребер; она, очевидно, не больше, чем длина ребра, на которое мы проецируем. Значит, l не превосходит размера параллелепипеда P.

С другой стороны, длина любого отрезка не превосходит суммы его проекций на три взаимно перпендикулярных направления. Поэтому размер параллелепипеда P' не больше l.

Тем самым, размер внутреннего параллелепипеда не больше размера внешнего.

А.Шень, В.Бугаенко