

треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 1 \\
 & & & & & 1 & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Если считать верхнюю строку нулевой, то в n -й строке стоят (в естественном порядке) коэффициенты разложения $(x + y)^n$. Например, четвертую строку образуют коэффициенты в правой части (13). Ясно, что таблицу можно продолжать неограниченно.

Данное расположение биномиальных коэффициентов обладает очень симпатичным свойством: каждый элемент таблицы (кроме окаймляющих единиц) есть сумма двух, стоящих непосредственно над ним. Соответствующее равенство

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad (14)$$

можно доказать тремя простыми способами.

Во-первых, прямой выкладкой:

$$\begin{aligned}
 \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \\
 &= \frac{(k-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \\
 &= (n-1)! \left(\frac{k}{k!(n-k)!} + \frac{n-k}{k!(n-k)!} \right) = \\
 &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad (15)
 \end{aligned}$$

Во-вторых, при помощи комбинаторных соображений: число k -под-

множеств n -множества, т.е. $\binom{n}{k}$, есть

число k -подмножеств, содержащих какой-либо фиксированный элемент,

т.е. $\binom{n-1}{k-1}$, плюс число k -подмно-

жеств, не содержащих того элемен-

та, т.е. $\binom{n-1}{k}$.

Третий способ – приравнивание коэффициентов при $x^{n-k}y^k$ в тождестве

$$(x + y)^n = (x + y)^{n-1}(x + y).$$

Конечно, для доказательства (14) вполне достаточно одного способа. Но для решения более сложных задач полезно уяснить связь между разными подходами.

До сих пор для вычисления $\binom{n}{k}$ у нас была формула (5), основанная на операциях умножения и деления. Треугольник Паскаля показывает, между прочим, что можно обойтись только операцией сложения (натуральных чисел). Требуемое число операций не слишком велико (кстати, найдите его), хотя и заметно больше, чем в формуле (5).

Помимо (14), имеется ряд других любопытных закономерностей. Скажем, сумма элементов n -й степени равна 2^n . Действительно, она равна $(x + y)^n$ при $x = y = 1$. Далее, в каждой строке (кроме нулевой) суммы элементов на четных и на нечетных местах совпадают. Для первой, третьей и т.д. строк это очевидно из соображений симметрии (одинаковые слагаемые в обеих суммах). Но, например, и для четвертой строки имеем $1 + 6 + 1 = 4 + 4$, хотя слагаемые различны. Почему бы это? Ключ к разгадке – та же биномиальная формула.

В общем, арифметический треугольник заслуживает того, чтобы изучить его вдоль и поперек. Да и наискосок тоже.

Ал-Каши и школьники

Комбинаторные понятия и, в частности, биномиальные коэффициенты встречаются в математике на каждом шагу. В связи с этим возникает пикантный вопрос об отношении к комбинаторике авторов наших школьных программ и учебников. Если, конечно, полное игнорирование можно считать отношением.

Важность комбинаторики была осознана давно. Бином Ньютона и треугольник Паскаля, вопреки названиям, были известны до Ньютона и Паскаля. Например, в начале XV века самаркандский математик и астроном ал-Каши написал общедоступный учебник элементарной математики «Ключ к арифметике». Наряду с десятичными дробями, извлечением корней и т.п. там приводились биномиальные коэффициенты и арифметический треугольник.

Для постановки образования на Руси усилия ал-Каши не могли иметь

заметных последствий. Не до науки было – смуты, междоусобицы, монголы... Да и вдобавок объединитель Руси Иван III к тому времени еще и родиться-то не успел.

С тех пор прошло без малого шесть веков. А выпускники наших школ знают о комбинаторике примерно столько же, сколько во времена монгольского ига. Вот разве что само название бинорма Ньютона знакомо теперь многим школьникам. Да и то благодаря роману «Мастер и Маргарита»!

Несколько слов об операциях над множествами

Вообще-то эта тема заслуживает более чем нескольких слов, но мы коснемся ее лишь по мере надобности. К тому же для большинства читателей, вероятно, тема эта не нова.

Простейшая операция над множеством A – образование его дополнения \bar{A} , т.е. множества, состоящего из всех элементов, не принадлежащих A (при этом предполагается наличие некоторого «объемлющего» множества B , для которого A и \bar{A} – подмножества). Мы по существу уже пользовались понятием дополнения, когда переходили к множеству «ненужных» объектов. При этом применялось очевидное соотношение $|A| + |\bar{A}| = |B|$. Здесь и далее через $|C|$ обозначается количество элементов множества C (мы рассматриваем лишь конечные множества).

Объединением

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

множеств A_1, \dots, A_m называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A_1, \dots, A_m . Пересечением

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m$$

$$\text{или просто } A_1 A_2 \dots A_m$$

множеств A_1, \dots, A_m называется множество элементов, принадлежащих всем множествам A_1, \dots, A_m .

Если, например, A_1 – множество четных цифр, т.е. $A_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, A_2 – множество цифр, кратных трем, т.е. $A_2 = \{0, 3, 6, 9\}$, то

$$A_1 \cup A_2 = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\},$$

$$A_1 A_2 = \{0, 6\},$$

$$|A_1 \cup A_2| = 7, |A_1 A_2| = 2.$$

Далее используются некоторые очевидные свойства операций объе-