

Рис. 7

Разобьем задачу на две части. Сначала рассмотрим заряд q_1 на расстоянии l_1 от сферы с зарядом Q_1 , а затем — заряд q_2 на расстоянии l_2 от сферы с зарядом Q_2 , при этом $Q_1 + Q_2 = Q$ (рис.7). Потенциал сферы в первом случае определяется формулой (7), а во втором случае — формулой (6). А теперь наложим первую систему на вторую. Так как потенциалы всех точек сферы были постоянными в каждом из случаев, при наложении систем они тоже будут постоянными, а заряд сферы будет равен Q . Следовательно, полученное при наложении распределение зарядов по поверхности сферы и будет правильным (теорема единственности). Для потенциала сферы получим

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{l_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R}$$

Этот результат естественным образом обобщается на любое количество точечных зарядов. Интересно отметить, что отсюда следует своеобразная эквивалентность точечных зарядов и

заряженных сфер в задаче, где требуется определить потенциал проводящей сферы. Поскольку вклад от точечного заряда в потенциал сферы зависит только от расстояния l между этим зарядом и центром сферы, потенциал сферы не изменится, если мы «размажем» этот заряд по поверхности воображаемой сферы радиусом l . Сравните, например, формулу (5) с формулой (6), а формулу (4) с формулой (7).

Задача 6. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Между сферами на расстоянии r от центра находится точечный заряд q . Какие заряды появятся на сферах, если их заземлить?

Выразим потенциалы сфер и приравняем их к нулю. Потенциал внутренней сферы равен потенциалу центра, т.е.

$$\varphi(R_1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{R_2},$$

где q_1 и q_2 — заряды сфер (после заземления). Поле во внешнем пространстве совпадает с полем точечного заряда $q_1 + q + q_2$, поэтому потенциал внешней сферы равен

$$\varphi(R_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q + q_2}{R_2}.$$

Теперь приравняем потенциалы обеих

сфер к нулю, решим полученные уравнения и найдем искомые заряды:

$$q_1 = -q \frac{\frac{R_2}{r} - 1}{\frac{R_2}{R_1} - 1}, \quad q_2 = -q \frac{1 - \frac{R_1}{r}}{1 - \frac{R_1}{R_2}}.$$

Упражнения

1. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Внутренняя сфера заряжена зарядом q , внешняя сфера не заряжена. Каким станет потенциал внутренней сферы, если внешнюю сферу заземлить? Как изменится при этом энергия системы?

2. Имеются три концентрические проводящие сферы радиусами R_1 , R и R_2 ($R_1 < R < R_2$). Среднюю сферу заряжают зарядом q , а внутреннюю и внешнюю сферы заземляют. Какие заряды появятся на этих сферах?

3. На расстоянии l от центра заземленной проводящей сферы радиусом R помещают точечный заряд q . Какой заряд появится на сфере?

4. Проводящую сферу радиусом R заземляют, а на расстояниях $l_1 < R$ и $l_2 > R$ от ее центра помещают точечные заряды q_1 и q_2 . Какой заряд появится на сфере?

5. Имеются две концентрические проводящие сферы радиусами R и $3R$. Между сферами на расстоянии $2R$ от их центра находится точечный заряд q . Какие заряды окажутся на сферах, если их соединить тонкой проволокой?

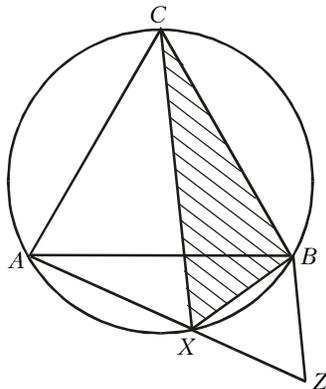
НАМ ПИШУТ

Еще два доказательства свойства правильного треугольника

В первом номере за 1999 год в статье «Вписанные многоугольники» тремя способами доказано, что если на дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X , то $AX + BX = CX$ (см. рисунок).

Между тем есть еще два замечательных доказательства. Во-первых, мы можем построить на отрезке XB вовне правильный треугольник XZB . При повороте вокруг точки B на 60° точка C переходит в A , X — в Z , треугольник CXB — в треугольник AZB . Значит, $CX = AZ$. Поскольку сумма противо-

ложных углов вписанного четырехугольника $AXBC$ равна 180° , имеем $\angle AXB = 120^\circ$, так что точки A, X, Z



лежат на одной прямой. Следовательно,

$$AX + BX = AX + XZ = AZ = CX.$$

Во-вторых, можно бесхитростно применить теорему косинусов: обозначив $AB = BC = CA = l$, $AX = a$, $BX = b$, $CX = c$, находим из $\triangle AXC$ и $\triangle CXB$:

$$l^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos 60^\circ, \\ l^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ.$$

Вычитая почленно, получаем $a^2 - b^2 - ac + bc = 0$, откуда

$$(a - b)(a + b - c) = 0.$$

Осталось разделить на $a - b$. (Случай $a = b$ легко разобрать отдельно.)

М.Панк