де всего заметим, что справа в скобках стоит элементарная площадка, заштрихованная на рисунке 1 вертикальными линиями. Значит, по мере того как «вулканическая пробка» будет лететь вдоль оси Y вверх, эти элементарные площадки покроют всю площадь под кривой $\rho(y)$, равную $\rho_0 y_*$, как было упомянуто ранее. И где-то недалеко от поверхности Земли (атмосфера тонкая!) сила сопротивления перестанет влиять на энергию поднимающегося тела. Именно здесь телу и нужно достичь второй космической скорости, чтобы в дальнейшем выйти за пределы притяжения Земли.

А что при этом творится в левой части уравнения (5)? Здесь после интегрирования по y (прохождения толщи атмосферы) получится натуральный логарифм от v^2, так что будем иметь

$$\ln\frac{v_{\text{II}}^2}{v_0^2} = -\rho_0 y_* \frac{S}{m}. \qquad (6)$$

С другой стороны, начальная скорость вылета «пробки» из вулкана достигается за счет силы давления pS, действующей на массу m. Если считать давление постоянным и пренебречь трением о стенки канала, эта сила обеспечивает постоянное ускорение $a = pS/m$. Следовательно, по законам равноускоренного движения на длине канала l разгоняемое тело приобретет удельную кинетическую энергию (энергию единичной массы)

$$\frac{v_0^2}{2} = al = \frac{pS}{m} l.$$

Подставив это выражение в уравнение (6) и сделав некоторые преобразования, получим

$$\frac{v_0^2}{v_{\text{II}}^2} = \frac{2pl\dfrac{S}{m}}{v_{\text{II}}^2} = e^{\rho_0 y_* \frac{S}{m}}. \qquad (7)$$

Теперь для простоты записи введем новые безразмерные (проверьте!) величины:

$$x = \rho_0 y_* \frac{S}{m}, \quad k = \frac{2pl}{\rho_0 y_* v_{\text{II}}^2}.$$

Первая из них зависит от характеристик тела: $\dfrac{S}{m} = \dfrac{\pi R^2}{4\pi R^3 \rho_S/3} = \dfrac{3}{4\rho_S R}$, где ρ_S – его плотность, а вторая – от параметров ускоряющего канала: давления p и длины l. В этих переменных уравнение (7) выглядит совсем просто:

$$kx = e^x. \qquad (8)$$

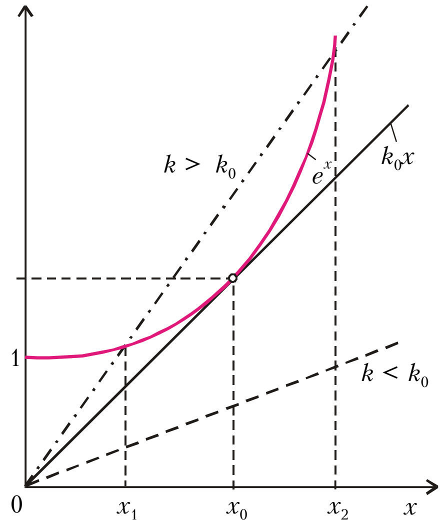

Рис. 2

Слева – уравнение прямой линии, справа – экспоненты. Обе эти линии изображены на рисунке 2. Видно, что при малых значениях k (когда, например, малы давление ускоряющих газов p или длина канала l) решения этого Последнейшего Уравнения (8) не существует: штриховая прямая не пересекает экспоненту. А при некотором значении k_0 имеется единственная точка касания, для которой $x_0 = 1$, $k_0 = e$ (убедитесь подстановкой). Отсюда и найдем все интересующие нас величины:

радиус шарового тела $R_0 = \dfrac{3}{4}\dfrac{\rho_0 y_*}{\rho_S}$,

необходимую длину канала $l_0 = e\dfrac{\rho_0 y_* v_{\text{II}}^2}{2p}$,

начальную скорость выброса $v_0 = \sqrt{e}\,v_{\text{II}}$ $(\approx 1{,}65 v_{\text{II}})$, необходимую для того, чтобы выброшенное вулканом тело, «пробив» атмосферу, все еще имело бы вторую космическую скорость.

(Заметим, однако, что при такой скорости газу трудновато угнаться за телом, тем более – оказывать на него постоянное давление. Так что, вообще говоря, нужно было бы рассматривать *нестационарное* движение сильно нагретых газов при вулканическом взрыве, когда быстро изменяются во времени и температура, и давление газов на ускоряемое тело. Надеемся, так и поступят наши читатели в недалеком будущем.)

Но каковы же канал и шар? Подставив в последние формулы $\rho_0 \sim 1$ кг/м^3, $y_* \sim 10$ км $= 10^4$ м, $\rho_S \sim 5\cdot 10^3$ кг/м^3, $p \sim 10^5$ атм $= 10^{10}$ Н/м^2, получим

$$R_0 \approx 1{,}5 \text{ м}, \quad l_0 \approx 160 \text{ м}.$$

Масса такого шара равна

$$m_0 = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho_S \approx 70 \text{ т}.$$

Совсем неплохо для спутника!

Но у Последнейшего Уравнения (8) есть и другие решения. Так, при $k > k_0$ прямая (штрих-пунктир на рисунке 2) дважды пересекает экспоненту. Два корня x_1 и x_2 соответствуют тяжелому и легкому шарам (ведь $x \sim 1/R$). Первый из них может быть выброшен с меньшей скоростью (чем определенная выше v_0), второй – с большей. Это и понятно: для камня сопротивление воздуха менее существенно, чем для пушинки.

И еще. Мы рассмотрели только вертикальный выброс. Конечно, вулкан мог бы выбросить «пробку» и через наклонный ствол (см. рис.1) и, может быть, таким образом породить спутник Земли. Для этого нужна меньшая скорость, а именно – первая космическая $v_{\text{I}} \approx 8$ км/с. Желающие да рассмотрят этот случай сами.

Итак, что сказал бы осторожный физик, принимая во внимание многочисленные упрощающие предположения, сделанные нами в процессе оценок? Он сказал бы: «Если удастся обеспечить постоянное давление вулканических газов порядка 100 атмосфер на длине канала порядка 100 метров, то, пожалуй, вулкан мог бы выбросить из своего жерла тело массой порядка 100 тонн со скоростью, достаточной для того, чтобы это тело ушло на бесконечность от Земли. Если, конечно, найдется такое тело, которое выдержит ускорение в десять тысяч g».

Ну, а нам в любом случае полезно было поговорить о физике на примере такого величественного явления, как извержение вулкана.