чисел до множества $Q[\sqrt{2}]$ чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a, $b \in \boldsymbol{Q}$. Нет никаких сомнений, что сумма, разность и произведение чисел вида $a + b\sqrt{2}$ – число такого же вида. С делением тоже все в порядке:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)} = 7+5\sqrt{2},$$

$$\frac{2-5\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{\left(2-5\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)}{\left(3+\sqrt{2}\right)\left(3-\sqrt{2}\right)} = \frac{16-17\sqrt{2}}{7}.$$

Видите, как просто? В общем виде это выглядит так:

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}} = \frac{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)}{\left(c+d\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)} = \frac{ac-2bd+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}.$$

Для алгебраических вычислений важно, что квадрат числа $\sqrt{2}$ равен 2. Комплексные числа мы получим, введя в рассмотрение число i, квадрат которого равен -1. Может показаться, что «такого не бывает», ведь уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений не только в рациональных, но и в вещественных числах. Однако число $\sqrt{2}$, заметьте, тоже «не существовало» до тех пор, пока мы рассматривали только рациональные числа.

Итак, рассмотрим выражения вида $a + bi$, где a, b – вещественные числа. Эти выражения мы и будем называть *комплексными числами*. Сумму и произведение *определим* естественными формулами

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Последняя формула, быть может, нуждается в комментарии:

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = $$
$$= ac + adi + + bci - bd.$$

Это именно комментарий, а не доказательство, поскольку пользоваться обычными правилами раскрытия скобок можно только после того, как даны определения сложения и умножения комплексных чисел и проверены эти «обычные правила», т. е. формулы $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (переместительный закон, или коммутативность сложения), $z_1z_2 = z_2z_1$ (коммутативность умножения), $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (сочетательный закон, или ассоциативность сложения), $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$ (ассоциативность умножения), $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$ (распределительный закон, или дистрибутивность).

Упражнения

20. Выполните эту проверку.

21. Докажите, что а) для любого комплексного числа z существует и определено единственным образом такое число w, что $z + w = 0 + 0i$; б) для любого отличного от числа $0 + 0i$ комплексного числа z существует и определено единственным образом такое число w, что $zw = 1 + 0i$.

в) Научитесь делить комплексные числа, т.е. для вещественных чисел a, b, c, d найдите, при условии $c^2 + d^2 \neq 0$, такие вещественные числа x и y, что $a + bi = (c + di)(x + yi)$. (Не удивляйтесь, что последняя формула записана без знака деления: если бы он был, то все равно пришлось бы дать определение частного $(a + bi)/(c + di)$ комплексных чисел. А самый разумный способ сделать это – назвать частным u/v, где $v \neq 0$, такое число w, что $u = vw$.)

22. Вычислите: а) i^3; б) i^4; в) i^{1999}; г) $1 + i + i^2 + \ldots + i^{10} + i^{11}$; д) $(1+i)^{12}$; е) $\left(i^{34}+i^{39}\right)/\left(i^{41}+i^{44}\right)$.

Геометрическая интерпретация

Формулы сложения и умножения комплексных чисел позволяют отождествить комплексное число $a + 0i$ с вещественным числом a. Поэтому в дальнейшем мы будем писать не $a + 0i$, а попросту a.

Расширение множества $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел до множества $\boldsymbol{C}$ комплексных чисел можно пояснить геометрически. Отождествим ось абсцисс координатной плоскости с вещественной осью (т.е. множеством всех вещественных чисел); единичный вектор (1; 0) оси абсцисс обозначим просто 1, а единичный вектор (0; 1) оси ординат обозначим через i (рис.1). Произвольный вектор $z = (x;\ y)$ плоскости можно теперь записать в виде $z = x(1;0) + y(0;1) = x + yi$. Принято вещественные числа x и y называть *вещественной и мнимой частями* комплексного числа z. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Сложение комплексных чисел –это обычное сложение векторов. А умножение определяется, как мы уже видели, более «хитрой» формулой.

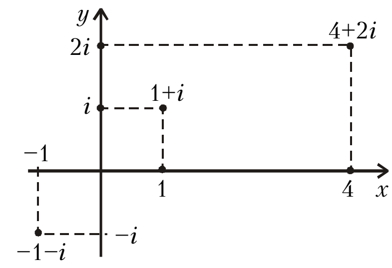

Рис. 1

Модуль комплексного числа

Определение. *Модулем (абсолютной величиной) числа $z = a + bi$ называют расстояние $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ от начала координат до точки $(a;\ b)$.*

Теорема 5. *Модуль произведения комплексных чисел равен произведению их модулей:*

$$\left|(a+bi)(x+yi)\right| = |a+bi|\cdot|x+yi|.$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (1):

$$\left|(a+bi)(x+yi)\right| = \left|(ax-by)+(ay+bx)i\right| =$$
$$= \sqrt{(ax-by)^2+(ay+bx)^2} = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)} =$$
$$= |a+bi|\cdot|x+iy|.$$

Упражнения

23. Научитесь извлекать квадратный корень из комплексного числа, т. е. для вещественных чисел a, b найдите такие пары $(x;\ y)$ вещественных чисел, что $(x+iy)^2 = a + bi$.

24. Решите в комплексных числах уравнения: а) $z^2 - 2z + 1 = i$; б) $z^2 - 5z + 7 = i$; в) $z^2 + 10 + 2i = (4 + i)z$.

Сопряженные числа

Уравнение $z^2 = -1$ имеет два корня: i и $-i$. Поскольку при вычислениях используется именно равенство $i^2 = -1$, возникает идея заменить i на $-i$. Верное равенство при одновременной замене всех входящих в него символов i на $-i$ останется верным!

Точная реализация этой идеи такова: два комплексных числа, действительные части которых равны, а мнимые части равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, называют сопряженными. Число, сопряженное