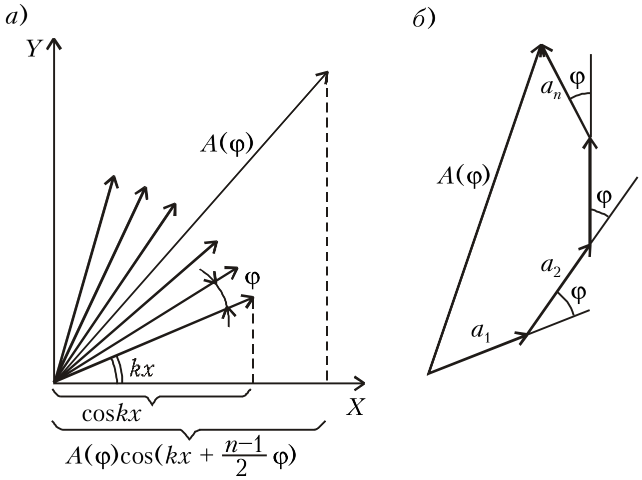

Рис. 8

этой функции. Особенности ее строения легко понять, если обратиться к векторной диаграмме (рис.9). При $\varphi(k) = 2\pi m$ все векторы вытянуты в линию, и их суммарная длина $A(\varphi) = n$. При небольшом изменении на $\Delta\varphi = 2\pi/n$ они складываются в правильный n-угольник, а $A(\varphi) = 0$. Затем происходит долгое движение вблизи нуля, пока при возрастании $\Delta\varphi$ на 2π векторы снова не вытягиваются в ряд.

Скомпоновав таким образом вклад одинаковых гармоник от всех ударов, для получения ответа нам осталось только проинтегрировать:

$$h(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty a(k)A(k)\cos\left(kx + vt + \frac{n-1}{2}\varphi\right)dk.$$

А обязательно ли это делать? Нет, ответ можно предсказать и без интегрирования!

Произведение $a(k)A(k)$ можно рассматривать как спектр суммарного возмущения, а его легко узнать. Амплитуда A, построенная как функция волнового числа $k = \frac{\varphi^2}{g\tau^2}$, по-прежнему имеет вид «гребенки» с пиками высотой n (см. рис.7,*б*). Единственное, теперь пики расположены не равномерно, а соответственно значениям

$$k_m = \frac{4\pi^2 m^2}{g\tau^2}$$

и полуширины у них различны:

$$\Delta k_m = \frac{dk}{d\varphi}\Delta\varphi = 2k_m\frac{\Delta\varphi}{\varphi_m} = \frac{2k_m}{nm}.$$

При перемножении гладкой функции $a(k)$ с «гребенкой» $A(k)$ получится снова «гребенка». Ну, а в таком случае мы, пожалуй, обойдемся без интегрирования. Ведь каждый пик – это волновой пакет (как на рисунке 6)!

Бросив много камней, мы создали бесконечный ряд волновых пакетов. Почему так происходит? Почему возбуждаются не все волны, а лишь избранные и близкие к ним? Причина простая – резонанс. Перепишем условие максимума амплитуды $\sqrt{kg}\,\tau = 2\pi m$, используя период $T = \lambda/v_ф = 2\pi/(kv_ф)$. Оно примет вид

$$\tau = mT$$

– а это и есть условие резонанса. Раскачиваются те волны, для которых удары приходятся ровно через период или целое число периодов. Совсем как для обычных качелей.

Рассказывая в начале о результатах наших наблюдений, мы немного слукавили. На самом деле, на воде возникает не один волновой пакет, а несколько (рис.10). Нам удавалось наблюдать пакеты до четвертого порядка включительно. Самое заметное и четкое образование, которое к тому же и появляется первым, – это пакет первого порядка. В нем $n/2$ горбиков, и он достаточно быстро движется. Если немного подождать на месте, а не идти за первым пакетом, то можно увидеть возникновение более слабого пакета второго порядка, в котором уже n горбиков, а затем – и возникновение пакетов следующих порядков.

Это все можно объяснить теоретически. Длина волны, наполняющей пакет m-порядка, равна

$$\lambda_m = \frac{g\tau^2}{2\pi m^2},$$

поэтому первый волновой пакет состоит из наполняющей с самой большой длиной волны. У него самая большая групповая скорость, он быстрее всех удаляется от начальной точки. А сколько в нем горбиков? На этот вопрос очень просто ответить. Полуширина пика первого порядка составляет $\Delta k = 2k_m/n$, а полуширина волнового пакета, состоящего из N волн, равна k_0/N; следовательно, в нем $n/2$ горбиков. Волновые пакеты более высоких порядков имеют наполняющую с меньшей длиной волны $\lambda_m = \lambda_1/m^2$. Поэтому групповые скорости у них меньше, и расходятся они через большее время. Кроме того, полуширина соответствующих им пиков меньше: $\Delta k = 2k_m/(nm)$, поэтому пакет m-го порядка состоит из

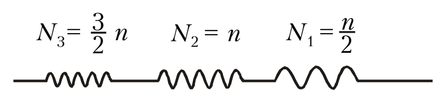

Рис.10

$nm/2$ горбиков. Что касается амплитуды, то она в m раз меньше, чем у первого. При увеличении числа волн в пакете он не только должен сужаться, но и вытягиваться. Однако высота пиков «гребенки» $A(k)$ одна и та же.

Итак, бросив в воду сорок камушков, вы увидите двадцать горбиков.

Сознаюсь, этот ответ мне по душе. Он подтверждает присущее всем нам чувство веры в общность и незыблемость законов сохранения. Все сходится: сорок камушков – двадцать горбиков – сорок раз поднимается поплавок. Правда, есть и другие пакеты, и поплавок еще не раз поднимется... Но согласитесь, что это нисколько не портит картину, а лишь обогащает ее.

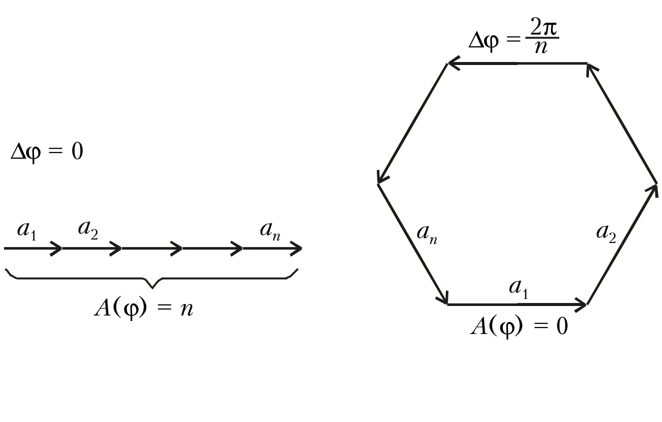

Рис. 9