Материалы вступительных экзаменов 1998 года

Московский государственный институт электронной техники

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(технический факультет)

1. Решите уравнение
$$3\sqrt{x}-5\sqrt[4]{x}=2.$$

2. Расставьте числа в порядке возрастания: $\log_5 4$, $\log_{0,2} 10$, $\log_{25} 2$.

3. Вычислите при $b=\sqrt[3]{3}$ значение выражения
$$\frac{3b^2-3}{b^4+3b^3}\cdot\left(\frac{4b+3}{b^2-b}-\frac{(1{,}5b+3)^2-2{,}25b^2}{3b^2-3}\right)-\frac{3}{b^4}.$$

4. Решите уравнение
$$4-18\sin 3x\cos 3x=\cos\frac{4\pi}{3}.$$

5. Решите неравенство
$$3^{2-x}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}>\frac{26}{3}.$$

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2|x|+y=4,\\ y-8x=10.\end{cases}$$

7. Для получения смеси было взято 18 г одной жидкости и 30 $см^3$ другой, в $4/3$ раза более плотной. Определите плотности этих жидкостей, если известно, что 22,5 г полученного раствора занимают такой же объем, как вся первая жидкость.

8. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 1, а сумма их попарных произведений равна $\frac{11}{36}$. Найдите эти числа.

9. Боковые ребра наклонной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны 5 см, а сечение плоскостью, пересекающей все боковые ребра призмы и перпендикулярной им, представляет собой ромб с острым углом 30°. Определите площадь боковой поверхности этой призмы, если объем пирамиды A_1ABCD равен 160 $см^3$.

10. В параллелограмме $ABCD$ около треугольника BCD описана окружность радиуса 2. Найдите длину диагонали AC, если известно, что дуги BD и DC, не содержащие других вершин треугольника BCD, равны 150° и 90° соответственно.

11. При каких значениях параметра a будет существовать единственное значение x, являющееся решением неравенства
$$\sqrt{2a+1+2ax-x^2}\ge a-x\,?$$

Вариант 2

(экономический факультет)

1. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-0{,}8$ и $\pi<\alpha<3\pi/2$.

2. Решите неравенство
$$x+\sqrt{x}-12>0.$$

3. Решите уравнение
$$2\cdot 9^x+6^x=3\cdot 4^x.$$

4. Три бригады укладывают рельсы. Первая и третья бригады совместно укладывают в месяц 15 км путей. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая при их совместной работе. Сколько километров путей укладывает в месяц первая бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада?

5. Известно, что первый, третий и седьмой члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии являются последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найдите знаменатель этой прогрессии.

6. Решите неравенство
$$\log_x^2 4+\log_x 2-5\ge 0.$$

7. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $BC=2a$ из вершин A и D радиусом a проведены две дуги, точку касания которых обозначим через M. Найдите радиус окружности, вписанной в криволинейный треугольник BMC.

8. Решите уравнение
$$5\sin 2x+\sin x+\cos x=\frac{31}{5}.$$

9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}\cos x-\arccos y=1,\\ \cos(\pi y)-\arcsin x=-1.\end{cases}$$

10. Постройте график функции $y=f(f(x))$, если
$$f(x)=\begin{cases}x+2, & \text{если } x\le 1,\\ 5-2x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

11. При каждом значении параметра a найдите все решения неравенства
$$x+2a-2\sqrt{3ax+a^2}>0.$$

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Автоколонна движется со скоростью $v_1=36$ км/ч, растянувшись вдоль дороги на расстояние $L=600$ м. Из хвоста колонны в голову посылается машина сопровождения, которая затем возвращается обратно. Сколько времени ушло на поездку, если скорость машины $v_2=72$ км/ч?

2. Льдина в форме параллелепипеда с площадью основания $S=0{,}5$ $м^2$ и высотой $H=80$ см плавает в озере. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду? Плотность воды $\rho_1=1000$ кг/$м^3$, плотность льда $\rho_2=900$ кг/$м^3$, ускорение свободного падения $g=10$ м/$с^2$.

3. Сосуд, содержащий атмосферный воздух при температуре $t_1=27$ °C, закрывают и начинают медленно охлаждать. При температуре $t_2=7$ °C на стенках сосуда появляется роса. Найдите относительную влажность атмосферного воздуха, если давления насыщенных паров при температурах t_1 и t_2 равны, соответственно, $p_1=3{,}6$ кПа и $p_2=1{,}0$ кПа.

4. В вершинах правильного шестиугольника со стороной $a = 30$ см расположены точечные положительные заряды в следующей последовательности: $+q$, $+2q$, $+3q$, $+4q$, $+5q$, $+6q$, где $q = 10^{-9}$ Кл. Определите направление и величину вектора напряженности электростатического поля в центре шестиугольника. Коэффициент пропорциональности в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2.

5. Электрон влетает в однородное постоянное магнитное поле перпендикулярно вектору магнитной индукции. Через какое время вектор скорости электрона изменит свое направление на противоположное, если индукция магнитного поля $B = 1$ мТл, удельный заряд электрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг?

6. Определите наибольшую скорость электронов, вылетающих из цезия при освещении его светом с длиной волны $\lambda = 331$ нм. Работа выхода электронов из цезия $A_{\text{вых}} = 3{,}02 \cdot 10^{-19}$ Дж, масса электрона $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, постоянная Планка $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с.

Вариант 2

1. Первую секунду равноускоренного движения по прямой с нулевой начальной скоростью тело двигалось со средней скоростью $v_{\text{ср}1} = 2$ м/с, а последнюю секунду – с $v_{\text{ср}2} = 22$ м/с. Определите среднюю скорость тела на всем пути.

2. Монета соскальзывает с нулевой начальной скоростью с вершины мяча диаметром $D = 40$ см и отрывается от него на высоте $h = 30$ см. Определите работу силы трения при соскальзывании монеты, если ее масса $m = 3$ г. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. При изохорном повышении давления идеального газа на $\Delta p_1 = 5 \cdot 10^4$ Па средняя квадратичная скорость его молекул возросла с $v_1 = 500$ м/с до $v_2 = 600$ м/с. На какую величину Δp_2 надо изохорно повысить давление, чтобы увеличить среднюю квадратичную скорость молекул от $v_2 = 600$ м/с до $v_3 = 700$ м/с?

4. Определите силу, действующую со стороны электрического поля на точечный заряд $q = 5$ нКл, помещенный внутрь плоского заряженного конденсатора емкостью $C = 1$ мкФ. Энергия электрического поля конденсатора $W = 2$ мкДж, расстояние между обкладками $d = 1$ мм.

5. Источник тока сначала присоединяют к двум соседним вершинам проволочной рамки в форме правильного n-угольника, а затем – к двум вершинам, расположенным через одну. При этом ток через источник уменьшается в $k = 1{,}5$ раза. Определите число сторон n-угольника. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

6. Собирающая и рассеивающая линзы с фокусными расстояниями $F_1 = 30$ см и $F_2 = 10$ см расположены на расстоянии $b = 20$ см друг от друга. На собирающую линзу падает параллельный главной оптической оси пучок лучей диаметром $D_1 = 12$ мм. Каков диаметр пучка за рассеивающей линзой?

Публикацию подготовили А.Берестов, С.Кальней, А.Клюшин, С.Куклин, Д.Ничуговский, А.Прокофьев, Г.Сафонова, Ю.Тыжнов

Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Из пункта A в пункт B одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 км, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 км. Найдите расстояние между пунктами A и B.

2. Найдите все корни уравнения

$$\cos 2x + \cos 6x = \cos 4x,$$

принадлежащие промежутку $[\pi/2; \pi]$.

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg\left(5x^2 - 6x + 2\right)}{\lg x} = 2.$$

4. Решите неравенство

$$2^{x+1} + 3 < 2^{1-x}.$$

5. Какая наибольшая площадь может быть у прямоугольного треугольника, одна вершина которого совпадает с точкой $M(5; 0)$, другая лежит на графике функции $y = x^3(5 - x)$, $0 \le x \le 5$, а вершина прямого угла – на оси Ox?

6. Найдите все значения p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2y = 1 + p(x+3), \\ y = \sqrt{x+1} \end{cases}$$

имеет единственное решение.

7. Основанием пирамиды $TABC$ служит треугольник ABC с углом A, равным $60°$. Боковое ребро TA совпадает с высотой пирамиды и равно h; ребро TC перпендикулярно стороне основания BC, а угол между ребром TB и биссектрисой основания AD равен $60°$. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через биссектрису AD и пересекающей ребро TB?

Вариант 2

1. Завод выпустил две партии изделий, пи этом затраты на изготовление первой партии оказались на 20%, а второй партии – на 25% больше, чем планировалось. Таким образом, общие затраты превысили планируемые на 24% и составили 186 тыс. рублей. Какие затраты планировались на изготовление каждой партии?

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\cos^2\sqrt{x} = \sin\sqrt{x}.$$

3. Решите уравнение

$$4^{x+\frac{1}{x}} - 5 \cdot 2^{x+\frac{1}{x}} + 4 = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_2\left(x^2 + 3x\right) \le 2.$$

5. Какой наибольший периметр может быть у прямоугольника, две вершины которого лежат на оси Ox, а две другие – на графике функции $y = \frac{4}{\sqrt{3}}\cos x$, $|x| \le \frac{\pi}{2}$?

6. Укажите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_3\left(2 + \frac{|x|}{x}\right) = (x+2)^2 + a$$

имеет два различных корня. Найдите эти корни при каждом a.

7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с диагоналями его основания углы $45°$ и $60°$, а расстояние между диагональю параллелепипеда и не пересекающей ее диагональю основания равно l. Найдите площадь сферы, описанной около параллелепипеда.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Как изменится положение уровня воды в стакане, где плавает кусок льда, когда лед растает?

2. На рисунке 1 изображено преломление луча света на границе двух

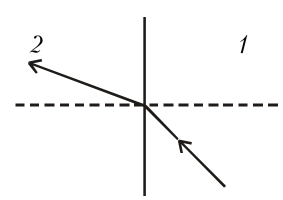

Рис. 1

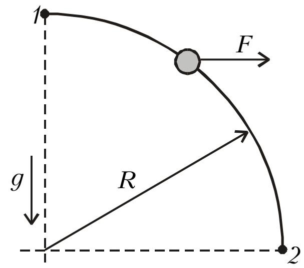

Рис. 2

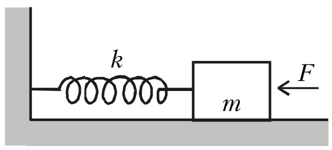

Рис. 3

сред. Какая среда оптически более плотная?

3. Найдите концентрацию молекул кислорода, если его давление $p = 0{,}2$ МПа, а средняя квадратичная скорость молекул $v = 700$ м/с.

4. Небольшая муфта массой $m = 0{,}15$ кг движется в вертикальной плоскости по гладкому ободу радиусом $R = 50$ см (рис.2). В точке *1*, где скорость муфты была $v_0 = 7{,}5$ м/с, на нее начала действовать постоянная горизонтальная сила $F = 30$ Н. Найдите скорость муфты в точке *2*.

5. На неподвижный груз массой $m = 1$ кг, лежащий на горизонтальном столе и прикрепленный к стенке пружиной жесткостью $k = 9 \cdot 10^2$ Н/м, начинает действовать постоянная горизонтальная сила $F = 1$ Н (рис.3). Через некоторое время t действие силы прекращается. При каком значении t скорость груза будет максимальной в момент прекращения действия силы?

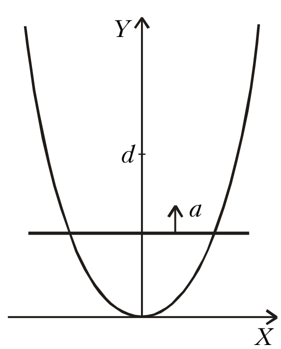

Рис. 4

6. Проводник, имеющий форму параболы $y = kx^2$, находится в однородном магнитном поле $\vec{B}$, перпендикулярном плоскости XY (рис.4). Из вершины параболы перемещают поступательно и без начальной скорости перемычку с постоянным ускорением a. Найдите ЭДС индукции в образовавшемся контуре при значении координаты $y = d$.

7. В вертикальном закрытом цилиндрическом сосуде, высота которого $h = 2$ м, а площадь основания $S = 300$ см^2, находится тонкий тяжелый поршень массой $M = 100$ кг. Первоначально поршень, делящий объем сосуда пополам, уравновешен. При этом над поршнем находится гелий массой $m = 1$ г, под поршнем – кислород. Поршень проницаем для гелия и непроницаем для кислорода. Через некоторое время поршень занимает новое равновесное положение, смещенное вверх. Найдите, на какую величину Δh сместился поршень. Процесс протекает при постоянной температуре $T = 300$ К. Трением пренебречь.

Вариант 2

1. Видны ли космонавтам звезды, когда космическая станция пролетает над освещенной Солнцем поверхностью Земли?

2. На брусок массой $m = 40$ кг, находящийся на горизонтальной плоскости, действует сила, равная $F = 200$ Н и направленная под углом $\alpha = 60°$ к горизонту (рис.5). Определите величину силы трения, действующей на брусок, если коэффициент трения скольжения $\mu = 0{,}5$.

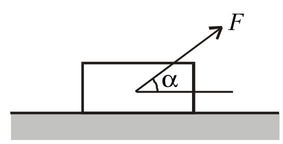

Рис. 5

3. Свет какой частоты следует направить на поверхность платины, чтобы максимальная скорость фотоэлектронов была $v = 3000$ км/с? Работа выхода электронов из платины $A = 10^{-18}$ Дж.

4. Два шарика одной и той же массы m соединены невесомой пружиной жесткостью k и длиной L и лежат неподвижно на гладком горизонтальном столе. Третий шарик массой m движется со скоростью v_0 по линии, соединяющей центры первых двух (рис.6), и упруго соударяется с одним из них. Определите максимальное и минимальное расстояния между шариками, соединенными пружиной, при их дальнейшем движении.

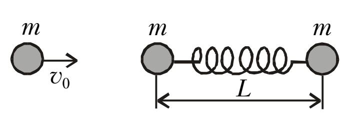

Рис. 6

5. В горизонтальной трубе между двумя поршнями, массой M каждый, находится 1 моль идеального одноатомного газа, масса которого много меньше массы поршней. В начальный момент температура газа равна T_0, а поршни имеют равные по величине скорости, направленные навстречу друг другу. При дальнейшем движении поршней по инерции максимальная температура газа оказалась равной T_1. Определите начальные скорости поршней, считая, что система теплоизолирована. Теплоемкостями поршней и трубы, а также внешним давлением и трением пренебречь.

6. В электрической цепи, показанной на рисунке 7, $\mathcal{E} = 22$ В, $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2$ Ом. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника тока, определите величину тока в резисторе сопротивлением R_1.

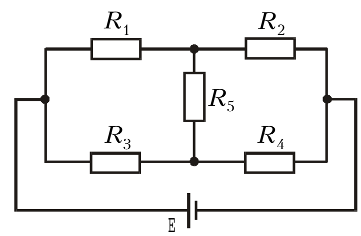

Рис. 7

7. Цистерна диаметром $D = 1{,}2$ м и длиной $L = 2{,}5$ м, наполненная до высоты $b = 1{,}6$ м нефтью, плотность которой $\rho = 0{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3 (рис.8), начинает двигаться горизонтально с постоянным ускорением $a = 2$ м/с^2. Определите силу давления нефти на переднюю по направлению движения стенку цистерны.

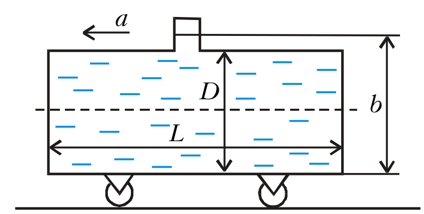

Рис. 8

Публикацию подготовили
Л.Паршев, Ю.Струков

Московский энергетический институт

МАТЕМАТИКА

Задачи письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} - \frac{a^3 + b^3}{a^2 - b^2} - \left(ab - 2^{1+2\log_2 a}\right)(a - b)^{-1}.$$

2. Предварительно упростив выражение для функции

$$f(x)=\frac{2x^{-1/3}}{x^{2/3}-3x^{-1/3}}-\frac{x^{2/3}}{x^{5/3}-x^{2/3}}-$$

$$-\frac{x+1}{x^2-4x+3}+4^{\log_2(x-1)},$$

найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$f'(x)f(x)-4\left[f'(x)+2f(x)\right]+32=0.$$

3. Предварительно упростив выражение для функции

$$f(x)=\left(\frac{(x+1)^3-3x^2-1}{x^2+3}+\right.$$

$$\left.+\frac{(x-1)^2-1}{x-2}\right)^3-8^{\log_2 x},$$

найдите $f'(x)$ и решите уравнение $x^2\left(\mathrm{tg}^2 x-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x+21\right)=f'(x)$.

4. Предварительно упростив выражение для функции

$$f(x)=\left(\frac{1}{x-\sqrt{2}}-\frac{x^2+4}{x^3-\sqrt{8}}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{x}+1\right)100^{\lg x},$$

найдите $f'(x)$ и для каждого значения параметра a решите неравенство

$$0{,}5(a+1)f'(x)>af(x)+1.$$

5. Решите неравенство

$$\lg(x+3)\le 1-\lg x.$$

6. Для каждого значения параметра a решите неравенство

$$\lg^2\left(16+x^2\right)-$$

$$-\lg\left(4+3a^2\right)\lg\left(16+x^2\right)\le 0.$$

7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a\cdot 25^{x^2}-(2a+3)\cdot 5^{x^2}+6a=0$$

имеет четыре различных решения.

8. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 216, а их сумма равна 31,5. Найдите знаменатель и первый член геометрической прогрессии.

9. Две трубы, работая совместно, заполняют бассейн за 3 ч. Одна вторая труба заполняет бассейн в три раза быстрее, чем одна первая. Найдите время, за которое заполняет бассейн каждая труба, работая отдельно.

10. В 10 часов из пункта A выехал велосипедист; в 12 часов из пункта A в том же направлении выехал мотоциклист, который догнал велосипедиста в 80 км от пункта A. Найдите скорость велосипедиста, если известно, что она в два раза меньше скорости мотоциклиста.

11. Найдите все корни уравнения

$$11\sin\left(\frac{13\pi}{2}+2x\right)+\mathrm{tg}^2\frac{7\pi}{3}\cdot\mathrm{tg}^2 x=$$

$$=14\sin^2\left(\frac{15\pi}{2}-x\right),$$

удовлетворяющие неравенству

$$(x-\pi)^2+2\pi x\le 2\pi^2.$$

12. Для каждого значения параметра a найдите все корни уравнения

$$(3-4a)\sin^2 x+(2a-1)\sin x=$$

$$=\sin x\cos 2x,$$

лежащие на промежутке $\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right]$, и укажите наименьший и наибольший из этих корней.

13. Точка F делит меньшее основание трапеции пополам, точка E делит большее основание трапеции в отношении 4 : 1. Найдите отношение, в котором прямая EF делит площадь трапеции, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого ее основания.

14. Длина стороны ромба равна 12 см, острый угол ромба равен полусумме наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корней уравнения

$$2\sin x\cos\frac{3x-1260^\circ}{2}=\sqrt{3}\sin\frac{3x}{2}.$$

Найдите площадь круга, вписанного в ромб.

15. В правильной треугольной пирамиде $DABC$ (D – вершина) на ребре AD взята точка E так, что $AE : ED = 2 : 1$. Площадь треугольника BCE равна S. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 2α.

16. Периметр основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равен p, центр сферы, описанной около пирамиды, делит высоту пирамиды в отношении 9 : 7 (считая от вершины S). Найдите радиус сферы, вписанной в пирамиду.

ФИЗИКА

Задачи письменного экзамена

1. По наклонной плоскости пустили снизу вверх небольшой шарик. На расстоянии $l = 0{,}3$ м от начала пути шарик побывал дважды: через $t_1 = 1$ с и через $t_2 = 2$ с после начала движения. Определите начальную скорость и ускорение шарика, считая его постоянным.

2. Магнит массой $m = 5$ кг движется вниз по вертикальной железной стенке, к которой он притягивается с силой $F_1 = 5$ Н. К магниту приложена сила, равная $F_2 = 20$ Н, линия действия которой составляет угол $\alpha = 30^\circ$ со стенкой (рис.1). Коэффициент трения между магнитом и стенкой $\mu = 0{,}2$. Определите ускорение магнита.

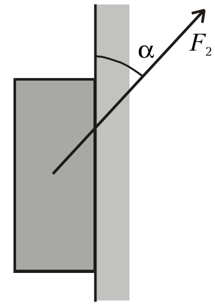

Рис. 1

3. Человек массой $m_1 = 80$ кг стоит на краю тележки массой $m_2 = 120$ кг и длиной $l = 3$ м. Определите, на какое расстояние сместится тележка, если человек перейдет на другой ее край. Трение между тележкой и полом, на котором она стоит, пренебрежимо мало.

4. На горизонтальной поверхности лежат два тела массами m_1 и m_2. Между ними находится ненапряженная пружина. Найдите минимальную горизонтальную постоянную силу, которую надо приложить ко второму телу, чтобы сдвинуть первое тело. Коэффициент трения между телами и горизонтальной поверхностью μ.

5. В вертикально расположенном цилиндрическом сосуде находится газ массой m с молярной массой M. Газ отделен от атмосферы поршнем, соединенным с дном сосуда пружиной жесткостью k. При температуре T поршень расположен на расстоянии h от дна сосуда. До какой температуры надо нагреть газ, чтобы поршень поднялся до высоты $2h$? Поршень считать невесомым. Атмосферное давление равно p_0.

6. Какое количество теплоты выделится при изобарном охлаждении $m = 0{,}1$ кг гелия от температуры $t_1 = 200$ °C до $t_2 = 27$ °C? Молярная масса гелия M = 0,004 кг/моль, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К).

7. В пространство между обкладками плоского незаряженного конденсатора вносят металлическую пластину, имеющую заряд Q, так, что между пластиной и обкладками конденсатора остаются зазоры шириной l_1 и l_2. Площади пластины и обкладок конденсатора одинаковы и равны S. Определите разность потенциалов между обкладками конденсатора. Электрическое поле между обкладками считать однородным.

8. От поверхности металлического шара массой M и радиусом R, заряженного зарядом Q, отрывается одноименно заряженный точечный заряд q массой m. Какой будет скорость точечного заряда на большом расстоянии от шара?

9. К концам медного проводника длиной l = 300 м приложено напряжение U = 36 В. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов в проводнике, если концентрация электронов проводимости в меди n = $= 8{,}5 \cdot 10^{28}$ $1/\text{м}^3$. Заряд электрона e = $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, удельное сопротивление меди $\rho = 1{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м.

10. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, ЭДС которой $\mathcal{E}$ = 100 В. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами от d_1 = 1 мм до d_2 = 2 мм. Площадь пластин S = 100 см^2. Выделением тепла в батарее и в подводящих проводах пренебречь.

11. К источнику тока подключены два резистора. На первом резисторе выделяется мощность P_1 = 1 Вт, на втором P_2 = 2 Вт. Какая мощность будет выделятся на втором резисторе, если первый резистор закоротить с помощью ключа K (рис.2)? Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

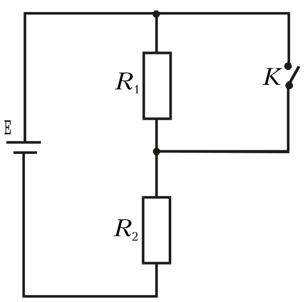

Рис. 2

12. В цепи (рис.3) все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи $\mathcal{E}$ = 9 В, ее внутреннее сопротивление мало. Вольтметр V_1 показывает U_1 = 4 В. Что показывают остальные вольтметры?

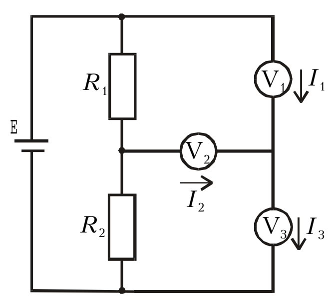

Рис. 3

13. Протон, летящий по направлению к ядру двукратно ионизированного неподвижного атома гелия, в некоторой точке поля с напряженностью E = 10 кВ/см имеет скорость v = 1,0 км/с. На какое расстояние протон сможет приблизиться к ядру? Электрическая постоянная ε_0 = $= 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м, масса протона m_p = $1{,}67 \cdot 10^{-28}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

14. Колебательный контур, содержащий конденсатор емкостью C = 20 пФ, настроен на длину волны λ = 5 м. Найдите индуктивность катушки контура. Скорость света в вакууме с = $= 3 \cdot 10^8$ м/с.

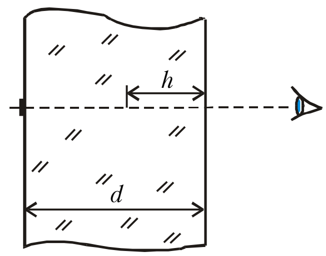

Рис. 4

15. На какой глубине h увидит изображение чернильного пятна, находящегося на стеклянной пластине толщиной d, человек, смотрящий прямо с противоположной стороны пластины (рис.4)? Показатель преломления стекла n.

Публикацию подготовили
В.Прохоренко, А.Седов

Новосибирский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Боб подарил другу Биллу несколько акций нефтяной компании. Часть акций Билл продал в тот же день, а остальные – через неделю, когда их стоимость на бирже уменьшилась из-за финансового кризиса, выручив в итоге этих операций некоторую сумму денег. Если бы Билл продал все акции сразу, то выручил бы в 1,25 раза больше, а если бы, наоборот, продал все акции через неделю, то выручил бы за них в 1,6 раза меньше, чем ему удалось получить на самом деле. Определите, во сколько раз уменьшилась стоимость каждой акции за неделю.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 5|y-2| = 11, \\ |x| + 2y = 5. \end{cases}$$

3. В прямоугольнике $ABCD$ через вершину B перпендикулярно диагонали AC проведена прямая, которая пересекает продолжение стороны AD в точке M и диагональ AC в точке K. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABM и AMK, равны 12 и 9 соответственно. Определите радиус окружности, вписанной в треугольник BCK.

4. Решите уравнение

$$\frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2\sin 2x + 1.$$

5. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, высота SH пирамиды равна $\sqrt{22}/3$. Через вершину S проведена плоскость, которая касается вписанной в пирамиду $SABC$ сферы и пересекает ребра AB и AC в точках M и N. Известно, что площадь треугольника SMN равна $7/12$. Определите:

а) длину отрезка MN;
б) объем пирамиды $SAMN$.

Вариант 2

(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)

1. В стране объявили деноминацию и выпустили в обращение одновременно со старыми сольдо новые, которые было трудно отличить от старых. Проходив весь день с шарманкой по городу, папа Карло заработал некоторое количество денег, среди которых наряду со старыми впервые попались и новые сольдо. Если он при подсчете этого не заметит и посчитает все сольдо за старые, то получится, что он заработал в 5 раз меньше, чем сумму, которую выручил на день раньше. Если же, наоборот, подсчитать собранные деньги так, как будто все сольдо новые, то получится, будто он заработал в 200 раз больше, чем на день раньше. Определите, сколько стоит новый сольдо по отношению к старому.

2. Решите уравнение

$$\log_5|x-3| = \log_5\left(x^2 - 3x\right) + 1.$$

3. Хорды AC и BD некоторой окружности перпендикулярны и пересекаются в точке K. Известно, что AK = 11, BK = 2, $CD = 10\sqrt{5}$. Определите периметр четырехугольника $ABCD$.

4. Решите уравнение

$$\frac{\sin 5x}{\sin x} = 1 + 2\cos x.$$

5. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 2, боковые ребра пирамиды равны $\sqrt{10}$. В плоскости основания проведена прямая, которая касается вписанной в квадрат $ABCD$ окружности и пересекает ребра BC и CD в точках M и N. Известно, что $MN = 5/6$. Найдите объем пирамиды $SMNC$.

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$2x - 6 \le \sqrt{x^2 - 3x + 6}\,.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{2/5} x + \log_5 x = \log_x (1/2).$$

3. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC. На стороне AB выбрана точка M так, что $BM = BC$. Известно, что радиус окружности, описанной около треугольника AMC, равен $2\sqrt{5}$, $AC = 5\sqrt{3}$. Определите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

4. Решите уравнение

$$\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin 7x\,.$$

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, ребра которого имеют длину 1, точка M – середина ребра BC. Точка P на прямой $A'C'$ и точка Q на прямой $B'M$ выбираются так, что прямая PQ параллельна плоскости $AA'B'B$. Определите длину наименьшего из всех возможных отрезков PQ.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные различной трудности от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – эта задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь необходимо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В сосуде под массивным подвижным поршнем находится жидкость, которая занимает объем V_1. Когда жидкость полностью испарилась, объем пара под поршнем достиг значения V_2. Какая доля вещества (по массе) находилась в сосуде в виде жидкости, когда объем под поршнем равнялся V? Температура в процессе не изменялась.

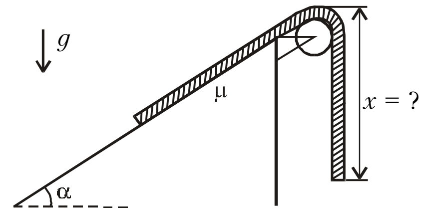

Рис. 1

2. Часть однородного каната лежит на клине, образующем с горизонталью угол α; другая часть, перекинутая через прикрепленный к вершине клина блок, свисает вертикально (рис.1). Коэффициент трения каната о плоскость μ ($\mu < \operatorname{tg}\alpha$). При какой длине x свисающей части канат будет находиться в покое? Длина всего каната l. Размером блока пренебречь.

3. На вход электрической цепи с первоначально незаряженными конденсаторами емкостями C_1 и C_2 подано с источника постоянное напряжение U, полярность которого указана на рисунке 2. Какие заряды окажутся на конденсаторах после изменения полярности напряжения? Диоды D_1 и D_2 идеальные. Стрелка в изображении диода показывает направление, в котором он пропускает ток.

4. На какую глубину надо погрузить в водоем детский резиновый мячик, чтобы он начал тонуть?

5. Пластинку из сырого картофеля толщиной примерно 10 мм протыкают стеклянной трубкой. Образовавшуюся пробку заталкивают в трубку на 10 – 15 мм. Вторую пробку формируют, протыкая картофельную пластинку другим концом трубки. Затем эту пробку начинают медленно толкать внутрь трубки. Первая пробка вначале движется медленно, а у конца трубки характер ее движения резко меняется. Объясните наблюдаемое явление.

Вариант 2

1. Тело на пружине, второй конец которой прикреплен шарниром к оси, движется по окружности. При скорости тела v_1 длина пружины l_1, а при скорости v_2 длина пружины l_2. Чему равна длина ненапряженной пружины? Влиянием силы тяжести пренебречь.

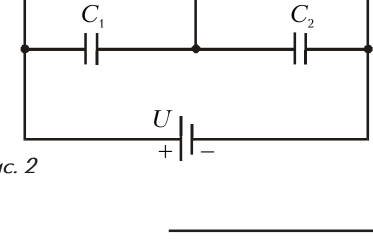

Рис. 2

2. На горизонтальную пластинку площадью S с отрицательным зарядом $-Q$ оседают из воздуха пылинки, масса каждой из которых m, а заряд $+q$. Какова наибольшая масса слоя пыли, осевшей на пластинку? Ускорение свободного падения g.

3. В вертикально стоящем цилиндре сечением S находится одноатомный газ. Расстояние между дном и нижним поршнем h, а между поршнями $2h$. Массы поршней одинаковы и равны m каждая. Нижний поршень, теплоемкостью которого можно пренебречь, является теплопроводящим. На какое расстояние сместится каждый из поршней после того, как к газу подвели количество теплоты Q? Внешнее давление постоянно и равно p_0, ускорение свободного падения g.

4. Оцените, сколько воды должно испариться при кипении, чтобы заполненный образовавшимся при этом паром детский воздушный шарик начал подниматься в воздухе. Считать, что пар не успевает остыть.

5. В цилиндрический стакан с водой вставляют непроницаемую для воды прозрачную воронку. При этом свет от лампы, находящейся далеко под дном стакана, почти не попадает на экран, расположенный над стаканом. А когда воронку заполняют водой, экран освещается прошедшим через систему светом. Объясните явление.

Вариант 3

1. Вертикальная стенка движется горизонтально с ускорением a, толкая перед собой прямоугольный брусок. Определите величину минимально возможного коэффициента трения между бруском и стенкой, при котором брусок не падает. Ускорение свободного падения g.

2. Вертикально стоящий сосуд с газом разделен тонким подвижным поршнем массой m и сечением S на две части высотой H каждая. Вначале температуры в них были одинаковы. После того как температуру в обеих частях увеличили вдвое, поршень поднялся на высоту h. Определите начальное давление в верхней части сосуда. Ускорение свободного падения g.

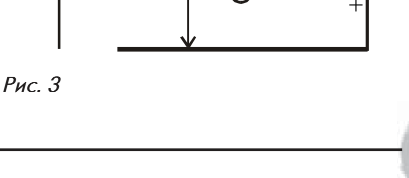

Рис. 3

3. Два длинных рельса, имеющих конечные сопротивления, расположены на расстоянии l друг от друга и соединены конденсатором емкостью C_0 с зарядом q_0 (рис.3). Перпендикулярно плоскости рельсов создано однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. К рельсам подлетает незаряженный конденсатор емкостью C и массой m, выводы которого начинают без трения скользить по рельсам. Найдите начальную скорость «перемычки», если она в процессе движения приходит в состояние покоя.

4. Оцените разницу показаний пружинных весов при взвешивании килограммовой гири в самолете, летящем вначале по маршруту Москва – Новосибирск, а потом Новосибирск – Москва.

5. См. задачу 5 варианта 2.

Публикацию подготовили Г.Меледин, М.Фокин

Российский государственный педагогический университет им. А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен (математический факультет)

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{|x-3|-1}$.

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = x \cdot f^2(x)$.

в) Пересекаются ли графики функций $f(x)$ и $h(x) = \sqrt{2|x-3|-1}$?

2. Решите неравенство

$$\log_{1/2}\left(9^x - 3^{x+1}\right) \ge -2.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} = 2\operatorname{ctg}^2 x,$$

содержащиеся в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; 8\right]$.

4. Найдите площадь равнобочной трапеции, у которой основания имеют длины 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны.

5. Радиус круга, описанного около основания правильной треугольной пирамиды, равен R, а плоский угол при ее вершине равен α. Определите ребро куба, площадь полной поверхности которого равна площади полной поверхности пирамиды.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \dfrac{3}{\log_2(x+3)}$.

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = (1+x) \cdot 8^{\frac{1}{f(x)}}$.

в) Решите уравнение

$$f(x) \cdot \log_2\left(x^2 - 9\right) = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3x}{3x+1}} > \frac{64}{27}.$$

3. Найдите все решения уравнения $\dfrac{\sin 6x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0$, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\right]$.

4. Два круга с радиусами R и r касаются внешним образом. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найдите длину последней касательной.

5. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция, основания которой равны a и b ($a > b$), а острый угол равен α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол, равный β. Найдите объем призмы.

Публикацию подготовили О.Корсакова, Г.Хамов

Российский государственный университет нефти и газа им. И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2{,}5}$

$$\frac{a^3 + 0{,}4\sqrt{0{,}4}}{a + \sqrt{0{,}4}} - \frac{a^3 - 0{,}4\sqrt{0{,}4}}{a - \sqrt{0{,}4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{2}}.$$

3. Отношение девятого члена геометрической прогрессии к ее шестому члену равно 1/8. Найдите первый член прогрессии, если ее пятый член равен 3.

4. Решите неравенство

$$0{,}6|x - 0{,}6| \ge x^2 + 0{,}45.$$

5. Решите неравенство

$$7^{\sqrt{x-12}} \ge 10^{6\sqrt{x-12}}.$$

6. Вычислите

$$\log_{16} 121 - \log_4(11/16).$$

7. Вычислите

$$\sin^2 13° + \cos 47° \cos 73°.$$

8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(x + 20°) - \sin(x + 10°) = \sin 5°.$$

9. Найдите значение параметра a, при котором наибольшее значение функции

$$y = -x^2 + (12a + 12)x - 31a^2 - 87a + 35$$

минимально.

10. Найдите произведение корней уравнения $x^{6\log_{27} x} = 243x^4$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектриса AP и высота CQ, точка их пересечения обозначена через M. Площади треугольников AMC и ABC относятся как 9 : 20. Найдите $\sin\angle BAC$.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен 6, а радиус шара с центром на основании пирамиды, касающегося всех боковых граней пирамиды, равен 9. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Вариант 2

1. Вычислите при $a = \sqrt{3} - 6$

$$\frac{3\sqrt{3} - 9a + 3\sqrt{3}a^2 - a^3}{\left(\sqrt{3} - a\right)^2}.$$

2. Найдите наименьшее целое значение x, входящее в область определения функции

$$y = \log_3 \frac{9 - x}{5x + 43}.$$

3. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии, если известно, что ее девятый член равен 22, а разность прогрессии равна 4.

4. Решите уравнение

$$|x - 9| = |x - 11|.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{64^{4-2x}} = \sqrt[3]{16^{2-4x}}.$$

6. Считая, что $\lg 2 = 0{,}301$, найдите $\lg 0{,}08$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}\sin 10x\right).$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} 22{,}5x}{1 - \operatorname{tg}^2 22{,}5x} = \frac{1}{2}.$$

9. График функции

$$y = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = -1$ и касается оси Ox в точке с абсциссой $x = 5$. Найдите абсциссу точки локального минимума этой функции.

10. Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x 0{,}5\sqrt{x}} \cdot \log_{0{,}25} x = -1.$$

11. В окружности с центром O проведен диаметр AB. Вторая окружность касается первой в точке M и диаметра AB в точке N, лежащей между O и B. Найдите отношение $MA : MB$, если $ON : AB = 1 : 4$.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус описанного шара равен 9. Найдите радиус вписанного шара, если известно, что центры этих шаров совпадают.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Внимание! Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным $10\ \text{м/с}^2$.

Вариант 1

1. С самолета, летящего на высоте 550 м со скоростью 180 км/ч, выпал груз. На какой высоте скорость груза будет направлена под углом 60° к горизонту?

2. Тело брошено под углом к горизонту с высоты 10 м над поверхностью земли со скоростью 20 м/с. На какой высоте его скорость будет равна 10 м/с?

3. Рабочий удерживает за один конец доску массой 30 кг так, что она образует угол 60° с горизонтом. С какой силой удерживает рабочий доску, если эта сила перпендикулярна доске?

4. Баллон емкостью 16,6 л содержит 550 г углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $4 \cdot 10^6$ Па. При какой температуре (в кельвинах) баллон может разорваться? Молярная масса углекислого газа 44 кг/кмоль, универсальная газовая постоянная 8300 Дж/(кмоль · К).

5. Два конденсатора, емкости которых 2 мкФ и 8 мкФ, соединены последовательно, а к внешним их концам подсоединен параллельно третий конденсатор емкостью 1,4 мкФ. Какова емкость (в мкФ) всей системы конденсаторов?

6. Вольтметр, рассчитанный на измерение напряжений до 10 В, необходимо включить в сеть с напряжением 120 В. Какое для этого потребуется дополнительное сопротивление, если сила тока в вольтметре не должна превышать 2 А?

7. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $0{,}001\ \text{м}^2$, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток (в мкА) потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью 0,05 Тл/с? Сопротивление витка 2 Ом.

8. Шарик массой 50 г, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания с амплитудой 10 см. Чему равна максимальная величина возвращающей силы (в мН), действующей на шарик, если циклическая частота колебаний $4\ \text{с}^{-1}$?

9. Тело массой 1 кг вращается в вертикальной плоскости на нити длиной 2 м. Когда тело при подъеме проходит точку, расположенную на 1 м выше точки подвеса нити, она обрывается. На сколько выше точки подвеса поднимется тело, если натяжение нити перед обрывом было равно 35 Н?

10. Мячик массой 300 г летел со скоростью 20 м/с. После удара о стенку он отскочил под прямым углом к прежнему направлению движения со скоростью 15 м/с. Какова средняя сила взаимодействия мячика и стенки во время удара, если продолжительность удара 0,05 с?

11. Генератор излучает импульсы сверхвысокой частоты с энергией в каждом импульсе 6 Дж. Частота повторения импульсов 700 Гц. КПД генератора 60%. Сколько литров воды в час надо пропускать через охлаждающую систему генератора, чтобы вода нагрелась не больше чем на 5 К? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К), плотность воды $1000\ \text{кг/м}^3$.

12. Два плоских зеркала располагаются под углом друг к другу и между ними помещается точечный источник света. Расстояние от этого источника до одного зеркала 3 см, до другого 8 см. Расстояние между изображениями 14 см. Найдите угол (в градусах) между зеркалами.

Вариант 2

1. Тело массой 5 кг передвигают вдоль гладкой горизонтальной поверхности, действуя на него силой 30 Н под углом 60° к горизонту. Найдите ускорение тела.

2. Шар массой 100 г, двигавшийся со скоростью 5 м/с, сталкивается абсолютно неупруго с шаром массой 150 г, двигавшимся в том же направлении со скоростью 4 м/с. Найдите скорость шаров после удара. Ответ дайте в см/с.

3. Один конец нити закреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом половина поплавка погружена в воду. Определите силу натяжения нити, если масса поплавка 300 г. Плотность пробки $300\ \text{кг/м}^3$, плотность воды $1000\ \text{кг/м}^3$.

4. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, в 6 раз меньше, чем на поверхности? Атмосферное давление 100 кПа, плотность воды $1000\ \text{кг/м}^3$. Температура воды в толще и на поверхности одна и та же.

5. Начальная внутренняя энергия газа была равна 450 Дж. Чему была равна его внутренняя энергия после передачи ему 300 Дж тепла, если он совершил при этом работу 500 Дж?

6. На сколько градусов изменится температура воды в калориметре, если через нагреватель пройдет 300 Кл электричества? Напряжение на нагревателе 210 В, масса воды 5 кг, удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · К). Теплопотери не учитывать.

7. Определите первоначальную длину (в см) математического маятника, если известно, что при уменьшении длины маятника на 15 см частота колебаний увеличивается в 1,5 раза.

8. В некотором прозрачном веществе свет распространяется со скоростью, вдвое меньшей скорости этого света в вакууме. Чему будет равен предельный угол (в градусах) полного отражения для поверхности раздела этого вещества с вакуумом?

9. В течение 20 с ракета поднимается с постоянным ускорением $0{,}8g$, после чего двигатели ракеты выключаются. Через какое время после этого ракета упадет на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Два шара с массами 400 г каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, проходящей через точку касания неподвижных шаров и перпендикулярной линии, соединяющей их центры. Чему равна масса третьего шара (в г), если после абсолютно упругого удара с неподвижными шарами он остановился? Все шары гладкие и имеют одинаковые радиусы.

11. Расстояние между двумя точечными зарядами 8 нКл и 6 нКл равно 5 см. Определите напряженность поля (в кВ/м) в точке, удаленной на 4 см от первого заряда и на 3 см от второго заряда. Коэффициент в законе Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ м/Ф.

12. Три стороны проволочного квадрата жестко скреплены друг с другом, а четвертая может скользить по ним. Квадрат расположен на горизонтальной поверхности и находится в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией 200 мТл. Какой ток надо пропустить по контуру, чтобы сдвинуть подвижную сторону, если ее масса 60 г, а коэффициент трения в контактах 0,1? Сторона квадрата 5 см.

Публикацию подготовили Б.Писаревский, А.Черноуцан

Санкт-Петербургский государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики – процессов управления; дневное отделение)

1. При каких значениях параметра a существует такое k, что уравнение

$$\left||x-2|-2x+1\right|=kx+a$$

имеет ровно три решения?

2. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+3-2x^2}}{x+1}\ge\frac{\sqrt{2x+6-4x^2}}{3x-1}.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 2x-\cos 2x=\frac{1}{2}+\sin x.$$

4. Площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна S. Длины его сторон AB, BC, CD и DA в указанном порядке образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите ее разность, если известно, что острый угол между диагоналями четырехугольника равен φ и $AB = a$.

5. Найдите угол между гранями ABC и ABD треугольной пирамиды $ABCD$, если известно, что $\angle ABD=\angle BAC=\alpha$, $\angle BAD=\angle ABC=\beta$ и $AB = CD$.

Вариант 2

(факультет менеджмента; дневное отделение)

1. При каких значениях параметра a уравнение $\log_{x+1}(4|x|-a)=2$ имеет ровно одно решение?

2. Решите неравенство

$$\sqrt{7-3x}>2+2x.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases}\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z=\dfrac{1}{12},\\ \sin x\cdot\sin y=\dfrac{2}{3},\\ x+y+z=\pi.\end{cases}$$

4. Найдите все значения x, при которых числа $|x-1|$, $3-x$, $3x-5$, расположенные в каком-либо порядке, образуют арифметическую прогрессию, разность которой больше 1.

5. Окружность радиуса R касается трех сторон параллелограмма $ABCD$ и отрезка BM, где M – точка на стороне CD, отличная от C и D. Найдите, в каком отношении отрезок BM делит площадь параллелограмма, если известно, что радиус окружности, вписанной в треугольник BCM, равен r.

Вариант 3

(факультеты психологии и экономический; вечернее и заочное отделения)

1. Геометрическая прогрессия с отрицательной суммой состоит из четырех членов. Выбросив из нее второй член и сохранив порядок, мы получим возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите знаменатель исходной геометрической прогрессии.

2. Изобразите на плоскости Oxy множество всех тех точек, координаты которых удовлетворяют равенству

$$\left|y^2-y\right|-\left|y-x^2\right|=x^2+y^2-2y.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3\left(3^{2x+1}-16\cdot 3^x+16\right)}{x+1}\le 1.$$

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\cos\sqrt{ax-x^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

имеет не менее семи решений.

5. Окружность проходит через вершину C прямоугольника $ABCD$, касается стороны AB, пересекает сторону CD в точке M и касается луча AD. Найдите сторону AB, если известно, что $AD = a$, $DM = c$.

Публикацию подготовили О.Иванов, Н.Нецветаев, Ю.Чурин

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен[1]

Вариант 1

(радиофизический факультет)

1. Упростите выражение

$$A=\left(\sqrt{a-4}\right)^2-\sqrt{(2-a)^2}.$$

2. Сколько процентов от числа 0,5 составляет его куб?

3. Известно, что многочлен x^2+px+q имеет корень $x=-2$ и достигает своего наименьшего значения при $x=2$. Найдите его второй корень.

4. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц

$$\frac{1-2\cos^2 14^\circ}{\sin 62^\circ}.$$

5. Напишите уравнения асимптот графика функции

$$y=\frac{2x+4}{x^2+3x+2}.$$

6. Упростите выражение $9^{1/\log_{\sqrt{7}}3}$.

7. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{7x-3-2x^2}.$$

8. Вычислите

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right).$$

9. Решите уравнение

$$\log_4\left(x^2\right)+2=0.$$

10. Найдите наименьший положительный период функции

$$y=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{5}.$$

11. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$5x<\frac{1}{0{,}4x}.$$

12. Найдите наименьшее значение функции

$$y=9^x-3^x.$$

13. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=1.$$

14. Найдите $\lg 24$, если известно, что $\lg 2=a$, а $\log_2 3=b$.

15. Представьте в виде периодической десятичной дроби сумму периодических десятичных дробей 0,3(4) и 0,(3).

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x-y=2+xy,\\ x^2+y^2=4.\end{cases}$$

17. Найдите множество значений функции

$$y=\frac{1-|x|}{1+x}.$$

18. В прямоугольном треугольнике с длиной гипотенузы равной 3, биссектриса, проведенная к катету, разбивает его в отношении 1 : 3. Найдите площадь треугольника.

---

[1] На выполнение задания давалось 120 минут.

19. При каких целых числах n число $\sin\dfrac{(5n-1)\pi}{6}$ является иррациональным?

20. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник, сторона которого равна $2\sqrt{2}$. Найдите объем призмы, если радиус описанной около нее сферы равен $\sqrt{3}$.

Вариант 2

(факультет экономики и менеджмента)

1. Упростите выражение

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+2\sqrt{x}+1}.$$

2. Разделите число 120 на две части в пропорции 12 : 3.

3. Упростите выражение

$$\frac{\sin\alpha-2\cos\alpha}{2-\operatorname{tg}\alpha}.$$

4. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц

$$\log_{\sqrt{2}}\frac{2}{3}+\log_9^{-1}2.$$

5. Решите уравнение

$$2^{2x}+4^{x-1}=5.$$

6. Решите уравнение

$$\lg\left(x-\frac{8}{3}\right)=-\lg x.$$

7. Найдите координаты середины отрезка, ограниченного точками $A(1;-2)$ и $B(-3;4)$.

8. Найдите сумму всех натуральных чисел n, для которых выражение $\dfrac{6}{n-1}$ является целым числом.

9. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{2+x}}{x-|x|}.$$

10. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}+2=\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}.$$

11. Решите уравнение

$$\cos x+\sin 3x=0\cdot$$

12. Вычислите без помощи калькулятора и таблиц $\arcsin\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

13. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-3x^2+6$ на отрезке $[1;3]$.

14. Решите неравенство

$$\lg\left(5x-4x^2\right)>0.$$

15. Решите неравенство

$$\frac{x}{(x+2)^2}<0.$$

16. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-\sqrt{x+1}=1,\\ 2y+x=4. \end{cases}$$

17. Площадь равнобедренной трапеции равна 1. Какое наименьшее значение может принимать сумма $a+b+2h$, где a, b – основания трапеции, а h – ее высота?

18. Решите уравнение

$$\sin 3x\cdot\cos^2 2x=1.$$

19. Найдите наибольшее значение параметра a, для которого функция $f(x)=ax^2+2ax+1$ на отрезке $[-3;0]$ удовлетворяет неравенству $|f(x)|\le 1$.

20. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, если длина высоты конуса равна 2, а угол между образующей конуса и его высотой равен 30°.

Публикацию подготовили Е.Подсыпанин, С.Преображенский, С.Тихомиров

Физико-математический колледж при «Курчатовском институте»

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$(x+4)\cdot 3^{1-|x-1|}-x=$$
$$=(x+1)\cdot\left|3^x-1\right|+3^{x+1}+1.$$

2. В окружности единичного радиуса с центром O проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Из конца D одного из диаметров проведена хорда DM, образующая с CD угол α, причем точка C лежит внутри угла AOM. Пусть N – точка пересечения хорды DM и диаметра AB. При каком значении угла α площадь треугольника ONM будет наибольшей? Чему равна эта наибольшая площадь?

3. При каких значениях α неравенство

$$x^2+4y-2x+y^2-\cos\alpha-\sin\alpha+5\le 0$$

имеет решение и из него следует неравенство $1>x^2-y-3x$?

4. В каких пределах меняется величина $3\arccos x+\arccos y$, если

$$(\arcsin x)^2+(\arccos y)^2=\frac{9\pi^2}{16}?$$

5. В треугольнике ABC даны радиусы описанной и вписанной окружностей, равные R и r соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 – точки пересечения биссектрис треугольника ABC с описанной окружностью. Найдите отношение площадей треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

6. Основанием пирамиды является трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны между собой, большее основание равно a и тупой угол трапеции равен α. Все боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол β. Определите объем пирамиды.

7. Выражение $x^7+\dfrac{1}{x^7}$ представьте в виде полинома от a, где $a=x+\dfrac{1}{x}$.

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Два тела, связанные жесткой нитью, находятся в равновесии на клине (рис.1) даже при условии, что коэффициент трения μ между телом B и плоскостью

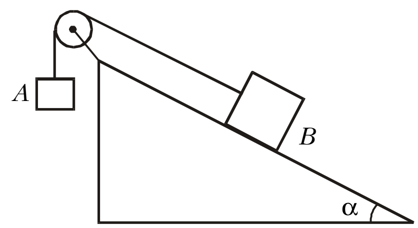

Рис. 1

равен нулю. Систему помещают на тележку, которая начинает двигаться вправо с ускорением a. При каком минимальном значении μ оба тела останутся неподвижными относительно клина? Угол наклона клина α, ускорение свободного падения g.

2. В цилиндре объемом V_1 = 30 л находятся в равновесии воздух, вода и насыщенный водяной пар. После изотермического сжатия до объема $V_1/3$ из цилиндра сливается содержащаяся в нем вода. Затем смесь пара и воздуха изотермически расширяется до объема $2V_1$. Найдите полную работу, совершенную внешними силами в этом цикле, если в процессе изотермического сжатия давление в цилиндре возросло от начального значения p_1 = 3 атм до p_2 = 5 атм. Объемом воды в цилиндре можно пренебречь, площадь под изотермой $pV=\mathrm{const}$ при изменении объема от V_1 до V_2 равна $p_1V_1\ln(V_2/V_1)$.

3. Длинные вертикальные проводящие рейки расположены в плоскости, перпендикулярной линиям однородного магнитного поля с индукцией $\vec{B}$. По рейкам, расстояние между которыми l, может скользить без трения проводник массой m (рис.2). Верхние концы реек замкнуты на резистор сопротивлением R, а нижние концы – на конденсатор емкостью C. В началь-

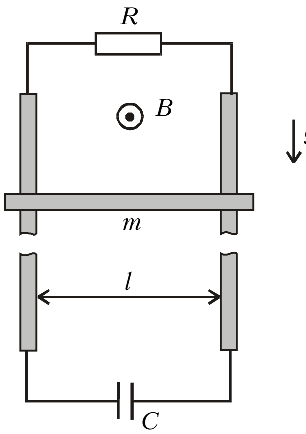

Рис. 2

ный момент времени проводник покоится, затем его отпускают, и он начинает падать. 1) Определите установившуюся скорость проводника и заряд конденсатора через достаточно большой промежуток времени. 2) Найдите ускорение проводника в начальный момент времени.

4. В колебательном контуре, состоящем из двух параллельно соединенных конденсаторов емкостями C_1 и C_2 и катушки индуктивностью L, происходят свободные колебания (рис.3). Амплитуда колебаний тока в катушке

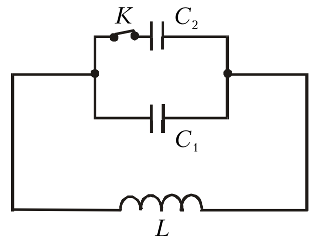

Рис. 3

равна I_0. В тот момент, когда ток в катушке был равен нулю, ключ K в схеме размыкают. 1) Во сколько раз изменится период колебаний в контуре? 2) Определите амплитуду колебаний заряда в конденсаторе емкостью C_1.

5. При определенных погодных условиях температура воздуха в узком слое толщиной h вблизи морской поверхности отличается на Δt градусов от температуры окружающей среды. Наблюдатель находится на обрыве высотой H_1 на берегу пролива шириной L, на другом берегу которого находится старинный замок с башнями высотой $H_2 = H_1$ (рис.4). Другой берег пролива находится за горизонтом, так что в обычную погоду наблюдатель вершин башен не видит. 1) Качественно объясните, какой знак должно иметь

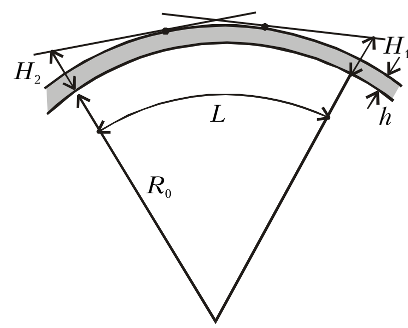

Рис. 4

Δt, чтобы данное явление наблюдалось, и нарисуйте траекторию лучей света. 2) При каком Δt наблюдатель впервые увидит вершины башен на другом берегу пролива? 3) При какой максимальной ширине пролива возможно данное явление при любой возможной величине Δt? Считать, что показатель преломления воздуха линейно зависит от температуры: $n(t) = n_0 + D\Delta t$, где величины n_0 и D известны ($D\Delta t \le n_0$), радиус Земли равен R_0, а при малых углах α выполняется приближенное равенство $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$.

Публикацию подготовил С.Фомичев

Дифракционные ореолы вокруг источников света

(Начало см. на 4-й с. обложки)

Фотографии, приведенные на обложке, были получены с помощью фотоаппарата «Зенит» с «нормальным» объективом (F = 50 мм). Источник фотографировался на просвет через разные «маски» с отверстиями, которые устанавливались перед фотообъективом. В качестве масок использовались и хаотически перфорированные экраны (с отверстиями диаметром порядка 10 – 20 мкм), и системы параллельных щелей (d ~ 20 – 50 мкм) и сетки (d ~ ~ 50 мкм) с различными коэффициентами пропускания света.

Такие картинки (или, по крайней мере, некоторые из них) первым наблюдал немецкий физик Йозеф Фраунгофер (1787 – 1826), изучавший дифракцию в параллельных лучах сначала от одной щели, а потом и от многих.

Гримальди описал свои опыты в книге «Физическое учение о свете, цвете и радуге», которая была опубликована в 1665 году, т.е. уже после смерти великого монаха. На эту работу ссылался и Исаак Ньютон, который продолжил исследования Гримальди и выполнил ряд тончайших для того времени экспериментов по дифракции света. Они описаны в третьей книге его «Оптики». Нельзя не вспомнить имена и других ученых, внесших свой вклад в изучение и объяснение явления дифракции света. Это Роберт Гук, Томас Юнг, Огюст Жан Френель, Джордж Эри, Доминик Франсуа Араго, Симеон Дени Пуассон. И список этот, как вы догадываетесь, отнюдь не полный.

В заключение – несколько вопросов для самостоятельных исследований (ответы на них будут приведены позже).

1. Можно ли восстановить геометрические параметры объекта-преграды по наблюдениям его дифракционной картины? Попробуйте это сделать по приведенным здесь фотографиям.

2. Правильно ли утверждать, что для наблюдения дифракции света на некотором объекте его характерные размеры должны быть порядка длины световой волны?

3. В чем различие дифракционных спектров, полученных с помощью одной щели и дифракционной решетки с периодом, равным ширине щели?

4. Повторите опыт Гримальди по наблюдению дифракционных полос в теневой картине какого-либо предмета, освещаемого точечным источником света. Пользуясь фотоаппаратом, запечатлейте наблюдаемую картину и объясните результаты эксперимента.

5. Томас Юнг показал, что интерференция играет важную роль в образовании дифракционных полос. Обсудите этот вопрос на примере дифракции света на щели или решетке.

6. На чем основана теория Френеля, объясняющая явление дифракции света? В чем суть этой теории?

7. Какое практическое применение имеет дифракция рентгеновских лучей и электронов?

8. Что помешало Ньютону, знакомому с явлением дифракции, обратиться к волновым представлениям о природе света?

А.Митрофанов