Законы Паскаля и Архимеда

А. ШЕРОНОВ

ПО ЗАКОНУ ПАСКАЛЯ, давление в окрестности некоторой точки, находящейся в жидкости или газе, передается во все стороны без изменений. В соответствии с законом Архимеда, на тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости или газа, вытесненного этим телом. В поле тяжести в жидкостях или газах давление в точках, отличающихся по высоте на h, изменяется на ρgh, где ρ – плотность жидкости или газа, g – ускорение свободного падения.

Рассмотрим теперь некоторые характерные примеры использования законов Паскаля и Архимеда при решении задач.

Задача 1. *Атмосфера Венеры состоит в основном из углекислого газа (CO_2), температура которого вблизи поверхности планеты $T = 800$ К, а плотность $\rho = 6{,}6$ г/л. Оцените запасы CO_2 на Венере, считая, что толщина атмосферы много меньше радиуса планеты $r = 6300$ км. Какой толщины была бы атмосфера Венеры, если бы она была равноплотной с давлением и температурой газа, равными их значениям у поверхности планеты? Ускорение свободного падения на Венере $g = 8{,}2$ м/с^2, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(моль·К), молярная масса углекислого газа $\mathrm{M} = 44$ г/моль.*

По уравнению состояния идеального газа, давление у поверхности Венеры равно $p = \rho RT/\mathrm{M}$. Это же давление равно весу атмосферы, деленному на площадь поверхности планеты: $p = mg/\left(4\pi r^2\right)$. Отсюда находим массу углекислого газа:

$$m = \frac{4\pi r^2 \rho RT}{\mathrm{M}g} \approx 6 \cdot 10^{19} \text{ кг}.$$

В равноплотной атмосфере толщиной h давление у поверхности (на глубине h) равно ρgh. Сравнивая это выражение с уравнением состояния, находим толщину равноплотной атмосферы:

$$h = \frac{RT}{\mathrm{M}g} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ м}.$$

Задача 2. *Мыльный пузырь надувают азотом. При какой величине диаметра пузыря он начнет всплывать в атмосферном воздухе той же температуры? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 45$ мН/м, молярная масса воздуха $\mathrm{M_в} = 29$ г/моль, азота $\mathrm{M_а} = 28$ г/моль, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, массой пленки пренебречь.*

Азот внутри мыльного пузыря находится под избыточным, по сравнению с атмосферным, давлением $\Delta p = 8\sigma/d$, где d – диаметр пузыря. Этот результат проще всего получить, если мысленно разрезать пузырь на две равные половинки плоскостью, проходящей через его центр, и рассмотреть условие равновесия этих половинок. Если избыточное давление в пузыре равно Δp, то половинки отрываются друг от друга с силой $\Delta p \pi d^2/4$. С другой стороны, они притягиваются друг к другу силами поверхностного натяжения мыльной пленки, действующими на длине окружности πd и равными $2\sigma\pi d$ (коэффициент «2» учитывает наличие двух поверхностей у пленки). Сравнение этих двух сил и дает величину избыточного давления под пленкой: $\Delta p = 8\sigma/d$.

Пузырь всплывет при условии, что выталкивающая сила, равная весу вытесненного пузырем воздуха при атмосферном давлении p_0, больше веса азота, находящегося внутри пузыря под давлением $p_0 + \Delta p$. По уравнению состояния газа,

$$\frac{\mathrm{M_в} p_0 \pi d^3}{6RT} \ge \frac{\mathrm{M_а}\left(p_0 + \Delta p\right)\pi d^3}{6RT},$$

откуда находим

$$d \ge \frac{8\sigma \mathrm{M_а}}{p_0\left(\mathrm{M_в} - \mathrm{M_а}\right)} \approx 10^{-4} \text{ м}.$$

Задача 3. *Батискаф представляет собой шар радиусом $r = 2$ м. При испытаниях в море в нижней части батискафа образовалась течь, и он затонул, а в его верхней части образовалась воздушная прослойка в виде шарового сегмента толщиной $h = 1$ м. Чему равна глубина моря H, на которой затонул батискаф? Какая масса воздуха понадобится для того, чтобы вытеснить из батискафа всю воду? Начальное (атмосферное) давление воздуха в батискафе равно давлению, которое создает слой воды толщиной $H_0 = 10$ м. Указание: объем шарового сегмента толщиной h равен $\Delta V = \pi h^2(3r - h)/3$.*

Свободная поверхность воды внутри батискафа горизонтальна. Давление вблизи нее, равное давлению воздуха в батискафе, меньше давления в нижней части батискафа (точка A на рисунке 1) на величину $\rho g(2r - h)$, где $\rho = 10^3$ кг/м^3 – плотность воды. В свою очередь, давление в точке A (дно водоема) складывается из атмосферного давления и давления слоя воды толщиной H. Чтобы найти глубину водоема, необходимо для воздуха, находящегося внутри батискафа (его масса по условию не изменилась), записать закон Бойля – Мариотта:

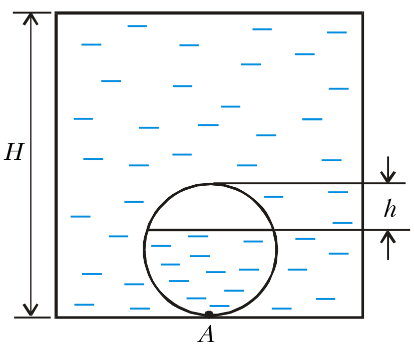

Рис. 1

$$\rho g\left(H_0 + H - (2r - h)\right) \cdot \Delta V = \rho g H_0 \cdot \frac{4}{3}\pi r^3.$$

По условию, $h = r/2$, поэтому окончательно находим

$$H = \frac{27}{5}H_0 + \frac{3}{2}r = 57 \text{ м}.$$

Чтобы найти массу воздуха, необходимую для вытеснения из батискафа воды, учтем, что в конце, когда воздух заполняет весь объем батискафа, его давление превышает атмосферное на ρgH. Из уравнения состояния находим искомую массу воздуха:

$$m = \frac{M\rho g H \cdot 4\pi r^3/3}{RT} \approx 225 \text{ кг},$$

где $M = 29$ г/моль – молярная масса воздуха, $T = 290$ К – его температура. Можно отметить, что в стандартном баллоне объемом 40 литров под давлением 200 атмосфер при комнатной температуре содержится приблизительно 10 кг воздуха.

Задача 4. *Свая в виде двух соосных цилиндров забита в грунт дна водоема глубиной H (рис.2). Какая сила действует на сваю со стороны воды?*

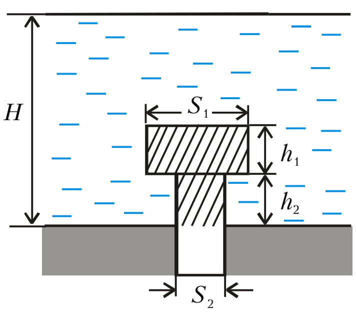

Рис. 2

Сечение верхнего цилиндра S_1, его высота h_1, сечение нижнего цилиндра S_2, высота его части, находящейся в воде, h_2.

Силы давления воды на боковые поверхности сваи компенсируют друг друга. Выталкивающая сила, действующая на нижнюю часть верхнего цилиндра сваи сечением $S_1 - S_2$, равна $\rho g(H - h_2)(S_1 - S_2)$, где ρ – плотность воды. Сила, прижимающая сваю к грунту, действует на верхнее основание сваи сечением S_1 и равна $\rho g(H - h_1 - h_2)S_1$. Результирующая сила равна

$$F = \rho g(h_1 S_1 + h_2 S_2) - \rho g H S_2 .$$

Как видно, структура ответа простая: от обычной выталкивающей силы, найденной по закону Архимеда (соответствующий объем сваи на рисунке заштрихован), отнимается сила давления воды на нижнее основание сваи, как бы находящееся на уровне дна водоема. В зависимости от соотношения между h_1, h_2, S_1, S_2, H результирующая сила может быть как выталкивающей, так и прижимающей сваю ко дну водоема. В приведенных формулах отсутствует также атмосферное давление. Вопрос о том, проникает ли воздух через грунт и тем самым передает свое давление на нижнее основание сваи, забитой в грунт, мы оставляем на суд читателя.

Задача 5. *В стратифицированной жидкости плотность увеличивается с глубиной h по линейному закону $\rho(h) = \rho(0)(1 + \alpha h)$, где $\rho(0)$ – известная плотность на поверхности. Для измерения константы α в жидкость на нити, прикрепленной к динамометру, опускают цилиндрическое тело длиной L и сечением S. Когда тело перемещается по вертикали на H, оставаясь целиком погруженным в жидкость, показания динамометра изменяются на ΔF. Чему равна константа α?*

Воспользуемся законом Архимеда и найдем разность выталкивающих сил при перемещении тела по вертикали на H. Очевидно, что если тело опускается, выталкивающая сила увеличивается, а показания динамометра, равные разности веса тела и силы Архимеда, уменьшаются. Пусть в начале верхняя грань цилиндра находится на глубине h_1, нижняя на глубине $h_1 + L$, а в конце – верхняя на глубине $h_1 + H$, нижняя на глубине $h_1 + H + L$. Так как плотность жидкости меняется по линейному закону, вес воды, вытесненной телом в начале, пропорционален площади трапеции, заштрихованной на рисунке 3:

$$F_1 = gSL\frac{\rho(h_1) + \rho(h_1 + L)}{2}.$$

Аналогично, вес воды, вытесненной

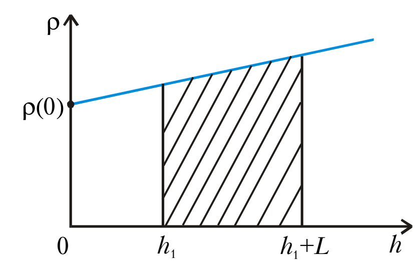

Рис. 3

телом в конце, равен

$$F_2 = gSL\frac{\rho(h_1 + H) + \rho(h_1 + H + L)}{2}.$$

При этом разность показаний динамометра составляет

$$\Delta F = F_2 - F_1 = gSL\rho(0)\alpha H ,$$

откуда и находим константу α:

$$\alpha = \frac{\Delta F}{gSL\rho(0)H}.$$

Эту константу можно найти и из разности давлений на верхнее и нижнее основания цилиндра длиной L при его перемещении по вертикали на H (убедитесь в этом самостоятельно).

Задача 6. *Трубка, запаянная с одного конца, опускается в жидкость сначала открытым концом вниз, а затем вверх и плавает, находясь в вертикальном положении. Длина погруженной в жидкость части трубки в первом случае на $\Delta L = 5$ см больше, чем во втором. Найдите высоту H слоя жидкости, зашедшей в трубку в первом случае. Отношение внутреннего сечения трубки S_1 к внешнему S_2 равно 0,5.*

Сила тяжести трубки остается неизменной, поэтому и выталкивающая сила в обоих случаях одна и та же. В первом

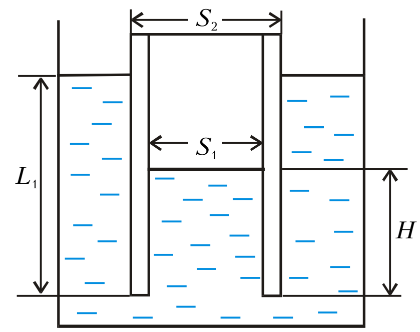

Рис. 4

случае (рис.4), по закону Архимеда, она равна $\rho g L_1 S_2 - \rho g H S_1$, во втором $\rho g L_2 S_2$, где ρ – плотность воды. Приравняв эти силы, получим

$$H = (L_1 - L_2)\frac{S_2}{S_1} = \Delta L\frac{S_2}{S_1} = 10 \text{ см}.$$

Приведем второй вариант решения – с использованием закона Паскаля, хотя в данном примере он и более громоздкий. В первом случае сила тяжести трубки mg и сила атмосферного давления p_0 на дно сечением S_2 уравновешены силой давления воздуха, находящегося внутри трубки при давлении p_1, на внутреннюю поверхность дна S_1 и силой давления воздуха и воды на поверхность боковых стенок пробирки площадью $S_2 - S_1$:

$$mg + p_0 S_2 = p_1 S_1 + (p_0 + \rho g L_1)(S_2 - S_1).$$

При этом имеет место очевидное равенство

$$p_1 = p_0 + \rho g(L_1 - H).$$

Во втором случае сила тяжести трубки уравновешена силой давления воды на дно сечением S_2:

$$mg = \rho g L_2 S_2 .$$

Силы давления атмосферы на поверхность трубки в этом случае скомпенсированы. Из приведенных равенств находим искомую высоту H.

Задача 7. *На дне лунки кубической формы размером $10 \times 10 \times 10$ см лежит шар, диаметр которого немного меньше 10 см. В лунку наливают воду плотностью $\rho = 1$ г/см^3 до тех пор, пока шар не начинает плавать, касаясь дна лунки. После этого в лунку долили еще $m = 250$ г воды так, что лунка оказалась заполненной водой до*

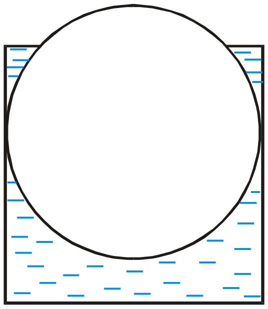

Рис. 5

верха (рис.5). Какую массу воды налили в лунку вначале? Чему равна плотность материала шара? Указание: объем шарового сегмента высотой h равен $\Delta V = \pi h^2(3d/2 - h)/3$, где d – диаметр шара.

По условию, сначала шар касается дна, а затем плавает в лунке, заполненной водой. Очевидно, что он всплывает при этом на высоту $h = m/(\rho d^2) = 2{,}5$ см $= d/4$. Значит, именно такова высота части шара объемом ΔV, находящейся над водой. Плотность материала шара $\rho_ш$ определим из закона Архимеда:

$$\rho\left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V\right) = \rho_ш \frac{\pi d^3}{6},$$

откуда

$$\rho_ш = \rho\left(1 - \frac{2}{d^3}h^2\left(\frac{3}{2}d - h\right)\right) = \frac{27}{32}\rho = 0{,}84 \text{ г/см}^3.$$

Далее, когда шар плавает в лунке, заполненной водой, в ней находится объем воды, равный $d^3 - (\pi d^3/6 - \Delta V)$, поэтому масса воды, налитая в лунку вначале, равна

$$m_0 = \rho\left(d^3 - \left(\frac{\pi d^3}{6} - \Delta V\right)\right) - m = \rho\left(d^3 - \frac{27}{32}\frac{\pi d^3}{6}\right) - m = 310 \text{ г}.$$

Задача 8. *В сосуд с водой (боковые стенки сосуда вертикальны) опустили кусок льда, в который был вморожен осколок стекла. В результате уровень воды в сосуде поднялся на $h_1 = 11$ мм, а лед стал плавать, целиком погрузившись в воду. На сколько опустится уровень воды в сосуде за время таяния льда? Плотность стекла $\rho_с = 2{,}0$ г/см^3, воды $\rho = 1$ г/см^3, льда $\rho_л = 0{,}9$ г/см^3.*

Пусть объем стекла $V_с$, льда $V_л$, а сечение сосуда S. Увеличение уровня воды в сосуде в начале равно $h_1 = (V_с + V_л)/S$. Когда лед растает, вода, получившаяся из него, займет объем $V = V_л\rho_л/\rho$. Следовательно, в конце увеличение уровня воды в сосуде будет равно $h_2 = (V_с + V)/S$, а искомое понижение составит $\Delta h = h_1 - h_2$. Связь между объемом льда и стекла найдем из условия плавания:

$$\rho(V_л + V_с) = \rho_с V_с + \rho_л V_л,$$

откуда

$$V_с = V_л \frac{\rho - \rho_л}{\rho_с - \rho}.$$

Подставив это соотношение в формулы для h_1 и h_2, найдем окончательно Δh:

$$\Delta h = h_1 \frac{\rho - \rho_л}{\rho}\frac{\rho_с - \rho}{\rho_с - \rho_л} = 1 \text{ мм}.$$

Задача 9. *Тройник с двумя открытыми в атмосферу и одной закрытой вертикальными трубками целиком заполнен водой. Когда тройник стали двигать по горизонтали (в плоскости рисунка 6) с некоторым ускорением, из него вылилась 1/8 часть всей массы содержавшейся в нем воды. Чему равно давление в нижней части (точка A) закрытой трубки во время движения с ускорением? Внутренние сечения всех трубок одинаковы, длины трубок L.*

При движении с ускорением $\vec{a}$ вправо вода из правого открытого в атмосферу колена перетекает в левое колено и оттуда выливается наружу. По условию, вылилась половина воды, находящейся в правом колене (длина всех трубок $4L$, вылилась 1/8 часть всей массы воды). Запишем уравнения движения для воды, находящейся в каких-либо двух горизонтальных участках трубки. Для участка BC имеем

$$(p_B - p_C)S = a\rho S\frac{L}{2},$$

где $p_B = \rho g L + p_0$ – давление в точке B, p_C – давление в точке C, p_0 – атмосферное давление, S – сечение трубки, ρ – плотность воды. На участке BD жидкость движется под действием разности давлений $\rho g L/2$, так как атмосферные давления в точках B и D скомпенсированы:

$$\rho g\frac{L}{2}S = a\rho SL.$$

Разделив эти два уравнения друг на друга, находим

$$p_C = \frac{3}{4}\rho g L + p_0.$$

Давление в искомой точке A отличается от найденной величины на $\rho g L$, поэтому давление в нижней части закрытой трубки равно

$$p_A = \frac{7}{4}\rho g L + p_0.$$

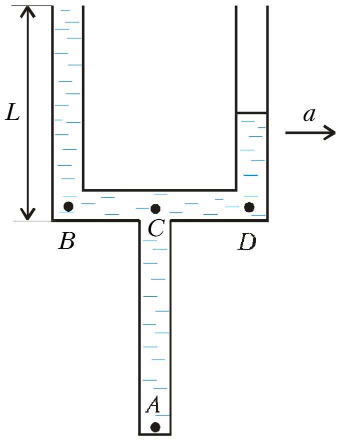

Рис. 6

Упражнения

1. Оцените массу кислорода, содержащегося в атмосфере Земли. Температура воздуха у поверхности $T = 290$ К, радиус Земли $r = 6370$ км. Масса кислорода, содержащегося в одном литре воздуха у поверхности Земли, равна $\rho = 0{,}26$ г/л, процентное содержание кислорода (по массе) в атмосфере постоянное, толщина атмосферы много меньше радиуса планеты. Слой какой толщины занял бы кислород у поверхности, если бы его температура и давление были равны соответствующим значениям температуры и давления у поверхности Земли?

2. Герметично закрытая с одного конца трубка опускается в воду закрытым концом кверху и плавает в вертикальном положении, что обеспечивается незначительными внешними боковыми усилиями. Длина части трубки, погруженной в воду, $H = 1{,}75$ м, длина всей трубки $L = 2$ м. Найдите высоту слоя воды, зашедшей в трубку. Атмосферное давление принять равным давлению, слоя воды высотой $H_0 = 10{,}5$ м.

3. Мыльный пузырь надувается воздухом, температура которого выше комнатной. При диаметре пузыря $d = 0{,}3$ мм он начинает всплывать (в комнате). На сколько процентов температура воздуха в пузыре выше комнатной? Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м. Атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па. Массой пленки пренебречь.

4. В лунку кубической формы размером $10 \times 10 \times 10$ см, целиком заполненную водой, опускают цилиндрическое тело (ось цилиндра вертикальна). В результате часть воды из лунки выливается, а тело начинает плавать в ней. После этого из лунки отлили еще $m = 250$ г воды так, что тело стало плавать, касаясь дна лунки. Какая масса воды осталась в лунке? Чему равна плотность материала цилиндра? Диаметр цилиндра d немного меньше 10 см, высота цилиндра равна его диаметру, плотность воды $\rho = 1$ г/см^3.