Великолепная десятка

Л.КУРЛЯНДЧИК

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ РАССМОТРИМ несколько задач, в которых изящество результатов сочетается с наличием красивых решений, по-видимому, не известных широкому читателю.

Начнем с задачи, имеющей очень красивый и неожиданный ответ.

Задача 1 (золотое сечение). *Дан треугольник ABC. Точки P и Q лежат на сторонах AB и AC соответственно, T – точка пересечения отрезков CP и BQ. Где следует выбрать точки P и Q, чтобы площадь треугольника PQT была наибольшей?*

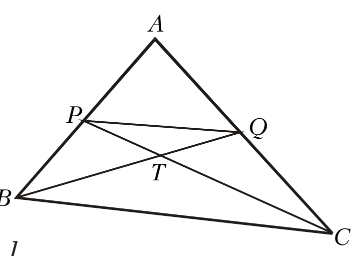

Рис. 1

Решение (векторы). Мы докажем, что площадь треугольника PQT максимальна в случае

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Положим (рис.1)

$$\vec{AB} = \vec{b},\ \vec{AC} = \vec{c},$$

$$\vec{AP} = p\cdot\vec{b},\ \vec{AQ} = q\cdot\vec{c},$$

где $0 < p,\ q < 1$. Тогда

$$\vec{PC} = \vec{c} - p\cdot\vec{b},\quad \vec{QB} = \vec{b} - q\cdot\vec{c}.$$

Пусть

$$\vec{BT} = n\cdot\vec{BQ},\quad \vec{PT} = m\cdot\vec{PC}.$$

Так как

$$\vec{BP} + \vec{PT} = \vec{BT},$$

то

$$(p-1)\vec{b} + m\left(\vec{c} - p\cdot\vec{b}\right) = n\cdot\left(q\cdot\vec{c} - \vec{b}\right),$$

или

$$(p - 1 - pm + n)\vec{b} + (m - qn)\vec{c} = \vec{0}.$$

Следовательно,

$$p - 1 - pm + n = m - qn = 0.$$

Отсюда получаем

$$m = \frac{q(1-p)}{1-pq},\ n = \frac{1-p}{1-pq}.$$

Поэтому

$$\vec{TP} = \frac{q(1-p)}{1-pq}\left(p\cdot\vec{b} - \vec{c}\right),$$

$$\vec{TQ} = \frac{p(1-q)}{1-pq}\left(q\cdot\vec{c} - \vec{b}\right).$$

Итак,

$$S_{PQT} = \frac{1}{2}\left|\vec{TP}\cdot\vec{TQ}\right| = \frac{1}{2}f(p,q)\left|\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,$$

где

$$f(p,q) = \frac{pq(1-p-q+pq)}{1-pq}.$$

Так как

$$p + q \ge 2\sqrt{pq},$$

то

$$f(p,q) \le \frac{pq\left(1 - 2\sqrt{pq} + pq\right)}{1-pq} = \frac{pq\left(1-\sqrt{pq}\right)}{1+\sqrt{pq}},$$

равенство достигается при $p = q$. При помощи дифференцирования легко показать, что при $0 < x < 1$ функция $\frac{x^2(1-x)}{1+x}$ принимает наибольшее значение при $x^2 + x - 1 = 0$, т.е. $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, $f(p,q)$ и, значит, S_{PQT} принимают наибольшее значение в случае $p = q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Следующая задача лишь на первый взгляд выглядит довольно мрачно. Мы приведем два красивых решения этой задачи.

Задача 2 (много корней). *Докажите, что для всякого натурального числа $n \ge 2$ справедливо неравенство*

$$\sqrt{2\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4\ldots\sqrt[n]{n}}}} < 2.$$

Первое решение (обратная индукция). Докажем более сильное утверждение, а именно, что для всех натуральных чисел $n \ge m \ge 2$ справедливо неравенство

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}} < 2.$$

Доказывать будем «обратной индукцией», т.е. сначала для $m = n$, а затем «вниз» до $m = 2$.

Ясно, что $\sqrt[n]{n} < 2$.

Для $m < n$ предположим, что

$$\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}} < 2.$$

Тогда

$$\sqrt[m]{m\sqrt[m+1]{(m+1)\ldots\sqrt[n]{n}}} < \sqrt[m]{m\cdot 2} \le 2.$$

Требуемый результат получаем, полагая $m = 2$.

Второе решение (логарифм). Обозначив левую часть неравенства через p, имеем

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2!} + \frac{\ln 3}{3!} + \ldots + \frac{\ln n}{n!}.$$

Так как $\frac{\ln x}{x}$ убывает при $x \ge 3$, то

$$\ln p = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\right) < \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3}(e-2).$$

Следовательно,

$$p < \sqrt{2}\cdot 3^{\frac{e-2}{3}} \approx 1{,}8397 < 2.$$

Кстати, в качестве оценки снизу имеем

$$\ln p > \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \frac{\ln 2}{2} + e - \frac{5}{2}.$$

Значит,

$$p > \sqrt{2}\cdot e^{e-\frac{5}{2}} \approx 1{,}1423.$$

Следующая задача может быть решена при помощи интегрирования, но имеет и весьма красивое элементарное решение.

Задача 3 (проекции). *На плоскости расположено конечное число отрезков общей длиной 1. Докажите, что существует такая прямая l, что сумма длин проекций этих отрезков на l меньше, чем* $2/\pi$.

Решение (вписанная окружность). Мы передвинем параллельно самим себе все n отрезков так, чтобы их середины совпали в точке V (рис.2).

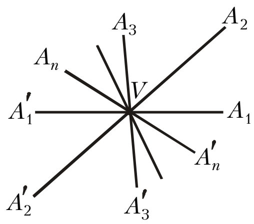

Рис. 2

Обозначим $2n$ полученных концов отрезков

$$A_1, A_2, \ldots, A_n, A_1', A_2', \ldots, A_n'.$$

Начиная от некоторой точки P_n', нарисуем отрезок $P_n'P_1$, равный и параллельный VA_1, затем нарисуем отрезок P_1P_2, равный и параллельный VA_2, и так далее; мы получаем точки P_3, … …, P_n, P_1', …, P_{n-1}'. В итоге получится (рис.3) выпуклый $2n$-угольник P с центром симметрии O (потому что пары

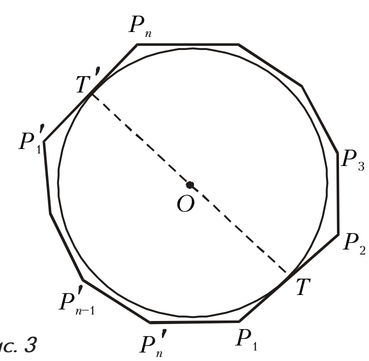

Рис. 3

противоположных сторон этого многоугольника равны и параллельны).

Выберем пару противоположных параллельных сторон, расстояние между которыми d минимально. Рассмотрим окружность с центром в точке O и диаметром d.

Эта окружность касается двух противоположных сторон во внутренних точках T и T'. Следовательно, она целиком лежит внутри многоугольника P. Поэтому

$$\pi d < \text{ периметр } P = 1.$$

Значит,

$$d < \frac{1}{\pi}.$$

Следовательно, ортогональные проекции всех $2n$ сторон многоугольника P на прямую TT' имеют общую длину $2d < 2/\pi$, что и требовалось доказать.

Чтобы лучше оценить следующую задачу, попробуйте сначала решить ее самостоятельно.

Задача 4 (циклическая сумма). *Пусть n – натуральное число, $n \geq 4$. Найдите наилучшие оценки снизу и сверху для суммы*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}}$$

(здесь, конечно, $x_0 = x_n$, $x_{n+1} = x_1$) для всех наборов n вещественных неотрицательных чисел ($x_1, x_2, \ldots, x_n$), в которых по циклу нет трех нулей подряд.

Решение (на границе нули). Докажем, что

$$1 < \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_i + x_{i+1}} \leq \left[\frac{n}{2}\right],$$

причем эти границы являются наилучшими.[1]

Пусть S – это данная сумма и $T = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Тогда

$$S > \frac{x_1}{T} + \frac{x_2}{T} + \ldots + \frac{x_n}{T} = 1.$$

Для того чтобы показать, что 1 – это наилучшая оценка снизу, положим $x_i = \varepsilon^{i-n}$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Имеем

$$S = \frac{\varepsilon^{i-n}}{1 + \varepsilon^{1-n} + \varepsilon^{2-n}} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{\varepsilon^{i-n}}{\varepsilon^{i-n-1} + \varepsilon^{i-n} + \varepsilon^{i-n+1}} + \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon^{1-n}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-1} + 1 + \varepsilon} + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon^{1-n}} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 1.$$

Теперь мы докажем, что наилучшая верхняя оценка равна m при $n = 2m$ и $n = 2m + 1$.

Пусть $n = 2m$. Заметим, что

$$\frac{x_1}{x_{2m} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} \leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2} = 1$$

(здесь, конечно же, использовано условие $x_1 + x_2 > 0$, но случай $x_1 = x_2 = 0$ очевиден). Аналогичные неравенства справедливы для всех пар последовательных слагаемых. Таким образом, получаем верхнюю оценку m; она достигается при $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

Пусть $n = 2m + 1$. Без ограничения общности мы можем предположить, что наименьший знаменатель – это $x_1 + x_2 + x_3$. Тогда

$$\frac{x_1}{x_{2m+1} + x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_3 + x_4} \leq 1.$$

А теперь достаточно снова воспользоваться тем, что сумма двух последовательных слагаемых не больше 1. При этом верхняя граница m достигается при $x_2 = x_4 = \ldots = x_{2m} = 0$ или $x_1 = x_3 = \ldots = x_{2m-1} = 0$.

Результат следующей задачи является первым шагом на пути решения весьма непростой проблемы.

Задача 5 (треугольник из бумаги). *Докажите, что любой треугольный кусок бумаги площадью 1 можно согнуть так, что, положенный на стол, он будет занимать площадь меньше, чем*

$$\frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Первое решение (биссектриса). Пусть ABC – данный треугольник со сторонами $a \leq b \leq c$.

Пусть точка D на стороне BC такова, что AD – это биссектриса угла A. Мы сложим треугольник ABC вдоль отрезка AD. Получившийся треугольник занимает площадь, равную

$$S_{ABD} = \frac{c}{b + c}.$$

Аналогично, если мы сложим треугольник ABC вдоль биссектрисы угла C, то площадь, покрываемая полученной фигурой, равна $\frac{b}{a + b}$.

Таким образом, остается только доказать, что

$$\min\left(\frac{b}{a + b}, \frac{c}{b + c}\right) < \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

или

$$\min\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{b}\right) < \left(\frac{2}{\sqrt{5} - 1} - 1\right)^{-1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = r.$$

Если $\frac{b}{a} < r$, то все доказано.

[1] *Квадратными скобками обозначена целая часть числа.*

Предположим, что $\frac{b}{a} \ge r$. Тогда

$$\frac{c}{b} < \frac{a+b}{b} = 1 + \frac{a}{b} \le 1 + \frac{1}{r} = r.$$

Второе решение (высота и биссектриса). Мы рассмотрим два случая.

1) $b \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть CH – высота, опущенная из вершины C. Мы сложим кусок бумаги

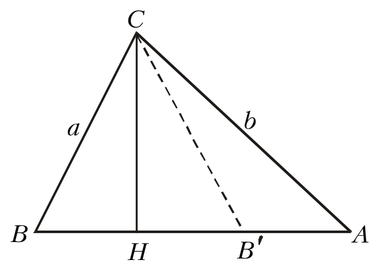

Рис. 4

вдоль CH (рис.4). Нам достаточно доказать, что

$$S_{AHC} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Так как $AB \cdot HC = 2$, то

$$S_{AHC} = \frac{HC \cdot HA}{2} < \frac{HC \cdot AC}{2} \le \frac{HC}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2) $b > \frac{\sqrt{5}-1}{2}c$.

Пусть AD – биссектриса угла A (рис.5). Мы сложим треугольник ABC

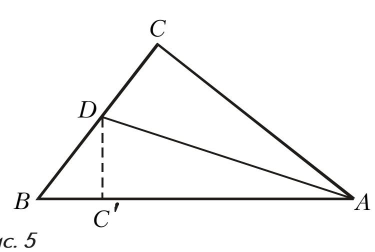

Рис. 5

вдоль AD и, так как точка C' лежит на стороне AB, нам достаточно рассмотреть треугольник ABD. Имеем

$$S_{ABD} = \frac{S_{ABD}}{S_{ABC}} = \frac{BD}{BC}.$$

Так как $\frac{CD}{BD} = \frac{b}{c}$, то

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD+CD}{BD} = 1 + \frac{b}{c} > 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Значит,

$$S_{ABD} = \frac{BD}{BC} < \frac{2}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Естественно возникает вопрос: а какова наилучшая оценка в этой задаче? Оказывается, она равна $2-\sqrt{2}$.

Следующая задача интересна тем, что в ней будут переплетены алгебра и геометрия.

Задача 6 (сумма корней). *Докажите, что для положительных чисел a, b, c справедливо неравенство*

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2} \ge 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Первое решение (сумма трех неравенств). Во-первых,

$$\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Действительно, возводя неравенство в квадрат и перенося все в левую часть, получаем

$$(a-b)^2 \ge 0.$$

Аналогично,

$$\sqrt{b^2+bc+c^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)$$

и

$$\sqrt{c^2+ca+a^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}(c+a).$$

Складывая эти три неравенства, получаем

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2} \ge (a+b+c)\sqrt{3}.$$

Остается доказать, что

$$\sqrt{3}(a+b+c) \ge 3\sqrt{ab+bc+ca}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат, сократив на 3 и умножив обе части на 2, а затем перенеся все в левую сторону, получаем

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0.$$

Второе решение (среднее арифметическое и среднее геометрическое). Мы докажем, что

$$\prod\left(a^2+ab+b^2\right) \ge (ab+bc+ca)^3. \quad (1)$$

Из этого неравенства, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, получим

$$\left(\frac{1}{3}\sum\sqrt{a^2+ab+b^2}\right)^3 \ge \prod\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \left(\sqrt{ab+bc+ca}\right)^3.$$

И сумма и произведение являются циклическими относительно a, b, c. Раскрывая скобки в неравенстве (1), получаем

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 + 2\sum a^3b^2c + \sum a^3b^3 + 3a^2b^2c^2 \ge \sum a^3b^3 + 3\sum a^3b^2c + 6a^2b^2c^2,$$

или

$$\sum a^4bc + \sum a^4b^2 \ge \sum a^3b^2c + 3a^2b^2c^2.$$

Используя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом еще раз, имеем

$$\sum a^4bc \ge 3\sum\sqrt{a^6b^6c^6} = 3a^2b^2c^2.$$

Тем самым, остается доказать, что

$$\sum a^4b^2 \ge \sum a^3b^2c.$$

Но

$$2\left(\sum a^4b^2 - \sum a^3b^2c\right) = \sum\left(a^2b-b^2c\right)^2 \ge 0.$$

Примечание для знатоков. Неравенство (1) можно доказать короче, используя неравенство Гёльдера.

$$ab+bc+ca = (ab)^{1/3}\left(b^2\right)^{1/3}\left(a^2\right)^{1/3} + \left(b^2\right)^{1/3}(bc)^{1/3}\left(c^2\right)^{1/3} + \left(a^2\right)^{1/3}\left(c^2\right)^{1/3}(ac)^{1/3} \le \left(ab+b^2+a^2\right)^{1/3} \times \left(b^2+bc+c^2\right)^{1/3} \cdot \left(a^2+c^2+ac\right)^{1/3} = \prod\left(a^2+ab+b^2\right)^{1/3}.$$

Третье решение (площадь треугольника). Докажем более общее неравенство.

Если $\alpha, \beta, \gamma > 0$ и $\alpha+\beta+\gamma = 2\pi$, то

$$\sum\sqrt{a^2-2ab\cos\gamma+b^2} \ge \sqrt{6\sqrt{3}\left|\sum ab\sin\gamma\right|}. \quad (2)$$

Пусть P – точка на плоскости. Рассмотрим треугольник ABC, вершины которого находятся на расстояниях a, b, c от точки P, с углами α, β, γ между отрезками PA, PB, PC – так, как это показано на рисунке 6.

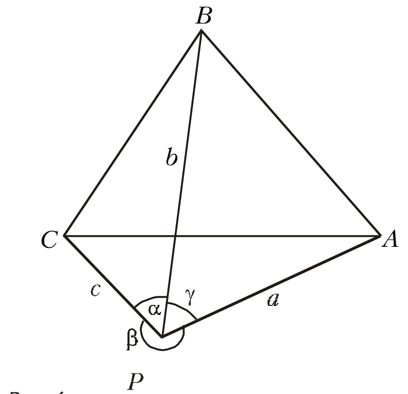

Рис. 6

Тогда

$$AB=\sqrt{a^2-2ab\cos\gamma+b^2}\,,$$

и так далее.

Известно, что среди всех треугольников заданного периметра наибольшую площадь имеет правильный треугольник. Поэтому

$$P\ge 2\sqrt{3\sqrt{3}S}\,, \qquad (3)$$

где P – периметр, а S – площадь треугольника ABC.

Так как

$$S=\frac{1}{2}\left|\sum ab\sin\gamma\right|,$$

то неравенство (2) следует из неравенства (3).

В следующей задаче красивый факт сочетается с изящным решением.

Задача 7 (касательные к двум окружностям). *Проведем четыре общие касательные к двум окружностям и точки касания соединим хордами, как показано на рисунке 7. (Эти хорды*

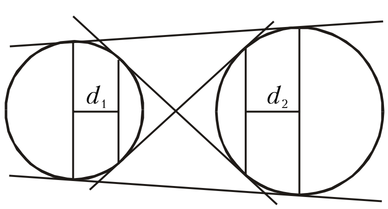

Рис. 7

параллельны, так как они все перпендикулярны линии, соединяющей центры окружностей). Докажите, что $d_1=d_2$.

Решение (отрезки касательных). Из рисунка 8 имеем

$$2BC+CD=AB+BD=AB+BH=$$

$$=GE+EF=EC+EF=2ED+CD.$$

Следовательно, $BC=ED$, и значит, $AB=EF=IH$. Из этих равенств следует, что $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$. Поэтому

$$d_1=a_1+b_1=a_2+b_2=d_2.$$

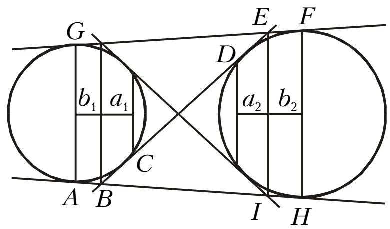

Рис. 8

Следующую задачу, конечно же, нельзя назвать малоизвестной, но я не могу удержаться, чтобы не привести ее красивое решение.

Задача 8 (двойная сумма). *Докажите, что для любых вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}\ge 0.$$

Решение (интеграл). Рассмотрим многочлен

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i a_j x^{i+j-1}.$$

Тогда

$$xp(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_i a_j x^{i+j}=$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}a_j x^j\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i x^i\right)^2\ge 0$$

для всех вещественных x.

В частности, $p(x)\ge 0$ при $0\le x\le 1$. Поэтому

$$0\le\int_0^1 p(x)dx=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}x^{i+j}\Big|_0^1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i a_j}{i+j}.$$

Неравенство строгое, за исключением случая $xp(x)\equiv 0$, т.е. $a_1=a_2=\ldots$ $\ldots=a_n=0$.

Задача 9 (четыре окружности). *На рисунке 9 точки A и B – центры больших окружностей. Из точек C и D проведены касательные. Докажите, что маленькие вписанные окружности имеют одинаковые радиусы.*

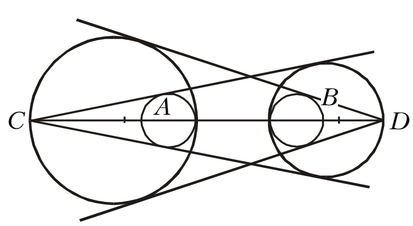

Рис. 9

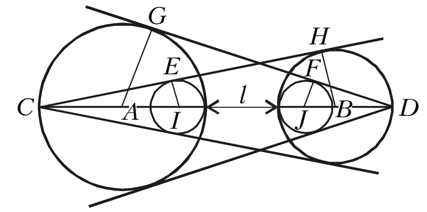

Рис. 10

Первое решение (подобие). Пусть R_a и R_b – радиусы больших окружностей, r_a и r_b – радиусы маленьких окружностей. Так как $\Delta CEI\sim\Delta CHB$ (рис.10), то отсюда

$$r_a=\frac{2R_aR_b}{2R_a+2R_b+l}.$$

Так как

$$\Delta DFJ\sim\Delta DGA,$$

то аналогично получаем, что

$$r_b=\frac{2R_aR_b}{2R_a+2R_b+l}.$$

Второе решение (подобие). Так как в подобных треугольниках CC_1C_2 и $CC_1'C_2'$ (рис.11) радиусы вписанных

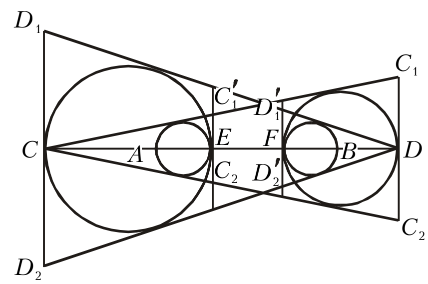

Рис. 11

окружностей пропорциональны высотам, то

$$\frac{R_b}{r_a}=\frac{CD}{CE},$$

или

$$r_a=\frac{CE\cdot R_b}{CD}=\frac{2R_bR_a}{CD}.$$

Аналогично, для треугольников DD_1D_2 и $DD_1'D_2'$ имеем

$$r_b=\frac{DF\cdot R_a}{CD}=\frac{2R_bR_a}{CD}.$$

Следующая задача тоже довольно известная, но наличие у нее большого числа симпатичных решений позволяет ей занять место в десятке.

Задача 10 (равные углы). *В треугольнике ABC точки N, L, M, в данном порядке лежащие на стороне AC, являются, соответственно, основаниями*

(Окончание см. на с. 34)

(Начало см. на с.28)

высоты, биссектрисы и медианы, проведенных из вершины B. Известно, что углы ABN, NBL, LBM, MBC равны. Найдите углы треугольника ABC.

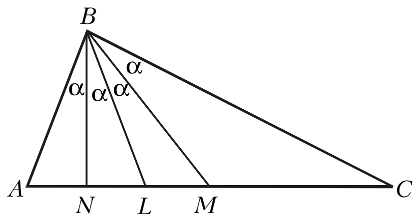

Рис. 12

Первое решение (теорема синусов). Положим $\alpha = \angle ABN$ (рис.12). Тогда

$$\angle BAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

и

$$\angle BCA = \frac{\pi}{2} - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем

$$BM = \frac{AM \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin 3\alpha} = \frac{AM \cos\alpha}{\sin 3\alpha},$$

$$BM = \frac{CM \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)}{\sin\alpha} = \frac{CM \cos 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Так как $AM = CM$, то

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}.$$

Отсюда $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 3\alpha \cdot \cos 3\alpha$, или $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.

Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то получаем, что $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Поэтому $\angle A = \frac{3\pi}{8}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $\angle C = \frac{\pi}{8}$.

Второе решение (описанная окружность). Пусть O – центр описанной около треугольника ABC окружности и BD – диаметр этой окружности. Так как $\angle BAC = \angle BDC$, то $\angle ABN = \angle CBO$. Следовательно, лучи BM и BO совпадают. Если $O \neq M$, то, так как отрезок OM перпендикулярен AC, медиана BM в этом случае совпадает с высотой BN, в противоречии с условием задачи. Итак, $O = M$ и угол B – прямой. Но тогда $\angle ABN = \frac{\pi}{8}$, $\angle BAC = \frac{3\pi}{8}$ и $\angle BCA = \frac{\pi}{8}$.

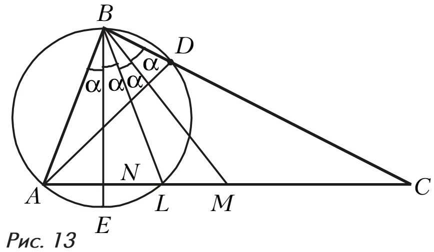

Рис. 13

Третье решение (два диаметра). Проведем окружность через точки A, B, L (рис.13). Центр этой окружности O лежит на луче BN. Пусть BE – диаметр этой окружности, D – точка пересечения окружности со стороной BC. Так как

$$\angle BAD = \angle BED = \frac{\pi}{2} - 3\alpha = \angle BCA,$$

то треугольники DBA и ABC подобны. Следовательно, они делятся одинаковым образом тремя линиями, исходящими из вершины B. Поэтому точка X пересечения отрезков BE и AD должна быть серединой отрезка AD. Итак, диаметр BE делит хорду AD пополам. А это возможно лишь в следующих двух случаях: либо диаметр и хорда перпендикулярны (что явно не выполняется в нашей ситуации), либо хорда сама является диаметром и точка пересечения – центр окружности. Итак, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

Четвертое решение (описанная окружность). Пусть P – точка пересечения луча BL с окружностью, описанной около треугольника ABC (рис.14). Следовательно, точка P – середина дуги AC. Поэтому $MP \perp AC$ и, значит, $BN \| MP$. Следовательно,

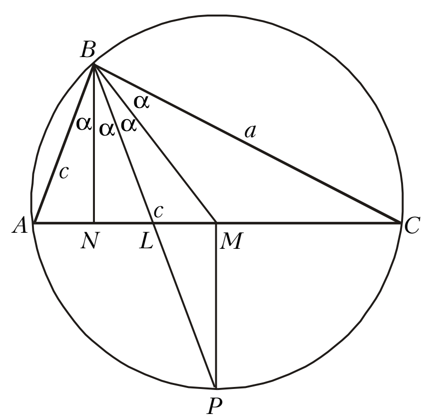

Рис. 14

$$\angle MBP = \angle NBL = \angle MPB.$$

Поэтому $MB = MP$. Тем самым, M – точка пересечения серединных перпендикуляров отрезков BP и AC и, значит, M – центр описанной около треугольника ABC окружности. Поэтому AC – это диаметр и угол ABC равен $\frac{\pi}{2}$.

Пятое решение (площадь). Применяя теорему синусов к треугольнику BML, имеем

$$\frac{BM}{\sin(90°+\alpha)} = \frac{BL}{\sin(90°-2\alpha)} = \frac{c}{\cos 2\alpha}.$$

Поэтому

$$BM = \frac{c\cos\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = 2 \cdot S_{BMC} = BM \cdot BC \cdot \sin\alpha =$$

$$= \frac{c\cos\alpha}{\cos 2\alpha} a \sin\alpha = \frac{ac \operatorname{tg} 2\alpha}{2}.$$

С другой стороны,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 4\alpha = \frac{ac \sin 4\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha =$$

$$= \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha.$$

Отсюда $\cos^2 2\alpha = \frac{1}{2}$ и, значит,

$$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 0 \cdot$$

Поэтому $4\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

В заключение я хочу принести свою искреннюю благодарность математику из Эссена (Германия) Йоахиму Зукку – благодаря ему я имел возможность ознакомится с материалами, при помощи которых была написана эта статья.