

представлено в виде  $K_{i\min} = \delta Mga$ , где  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения. Найдите коэффициент  $\delta$ , выразив его через угол наклона  $\theta$  и коэффициент  $r$ .

д) (2 балла) Если выполнено условие пункта с), то кинетическая энергия  $K_i$  будет приближаться к постоянной величине  $K_{i0}$  по мере того, как призма катится вниз по наклонной плоскости. Приняв, что этот предел существует, покажите, что  $K_{i0}$  можно записать в виде  $K_{i0} = kMga$ , и найдите коэффициент  $k$ , выразив его через  $\theta$  и  $r$ .

е) (2 балла) Вычислите с точностью до  $0,1^\circ$  значение минимального угла наклона  $\theta_0$ , при котором неравномерное качение, начавшись, будет продолжаться бесконечно.

**Задача 2. Вода под ледяным щитом**

Ледяной щит – это толстый слой льда (толщиной до нескольких километров), который покоится на поверхности земли, простираясь горизонтально на десятки и сотни километров. В данной задаче рассматривается таяние льда и поведение воды под слоем льда, находящимся при температуре, близкой к точке плавления. Будем считать, что в таких условиях лед создает давление как вязкая жидкость, но деформируется как хрупкий материал, главным образом – путем вертикального смещения. Для решения данной задачи вам известны следующие данные: плотность воды  $\rho_v = 1,000 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $\rho_l = 0,917 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость льда  $c_l = 2,1 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота плавления льда  $L_l = 3,4 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , плотность пород и магмы  $\rho = 2,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , удельная теплоемкость пород и магмы  $c = 700 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота плавления пород и магмы  $L = 4,2 \cdot 10^5 \text{ Дж/кг}$ , температура плавления льда  $t_l = 0^\circ \text{C}$  (она постоянна), средняя мощность теплового потока через поверхность земли  $J = 0,06 \text{ Вт/м}^2$ .

а) (0,5 балла) Рассмотрите толстый слой льда, расположенный на поверхности земли, через которую поступает средний поток тепла. Пользуясь данными, вычислите толщину  $d$  тающего за год слоя льда.

б) (3,5 балла) Рассмотрим теперь верхнюю поверхность щита. Пусть поверхность земли наклонена под углом  $\alpha$  к горизонту, а верхняя поверхность щита образует угол  $\beta$  с горизонтом, как показано на рисунке 2. Толщина льда в точке  $x = 0$  равна  $h_0$ . Таким образом, нижняя и верхняя поверхности щита могут быть описаны уравне-

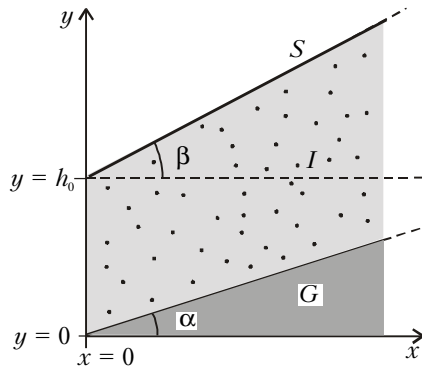


Рис.2. Поперечное сечение ледяного щита над наклонной земной поверхностью; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит

ниями  $y_1 = xt\text{g}\alpha$ ,  $y_2 = h_0 + xt\text{g}\beta$ . Получите формулу для давления  $p$  у нижней кромки щита в зависимости от горизонтальной координаты  $x$ . Найдите соотношение между углами  $\beta$  и  $\alpha$ , при котором вода в слое между льдом и землей не будет двигаться ни в одном направлении. Покажите, что это условие имеет вид  $\text{tg}\beta = s\text{tg}\alpha$ , и найдите коэффициент  $s$ .

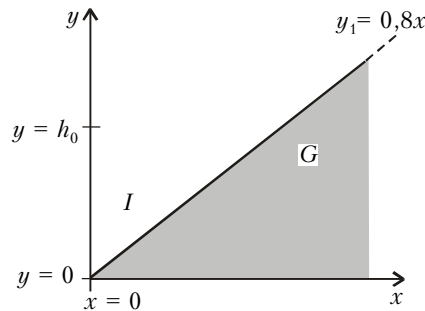


Рис.3. Поперечное сечение ледяного щита, покоящегося на наклонной поверхности земли; вода под щитом находится в состоянии равновесия; G – земля, I – ледяной щит

Линия, описываемая уравнением  $y_1 = 0,8x$  на рисунке 3, показывает поверхность земли под ледяным щитом. Толщина льда при  $x = 0$  равна  $h_0 = 2 \text{ км}$ . Полагая, что вода под щитом находится в равновесии, изобразите на графике линию  $y_2$  и добавьте линию  $y_1$ , показывающую верхнюю поверхность льда.

с) (1 балл) Внутри толстого слоя льда, находящегося на горизонтальной поверхности земли, первоначально имевшем постоянную толщину  $D = 2,0 \text{ км}$ , в результате таяния льда внезапно формируется коническая полость высотой  $H = 1,0 \text{ км}$  и радиусом  $r = 1,0 \text{ км}$ , полностью заполненная водой (рис.4). Будем считать, что остальной лед реагирует на образование этой полости только вертикальным смещением. Запишите аналитическое вы-

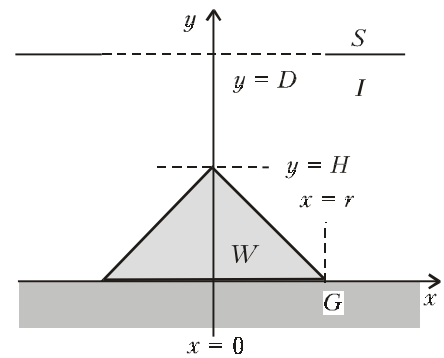


Рис.4. Вертикальный разрез по средней плоскости водяного конуса внутри ледяного щита; S – поверхность льда, W – вода, G – земля, I – ледяной щит

ражение для формы верхней поверхности ледяного щита после установления гидростатического равновесия и изобразите эту поверхность.

д) (5 баллов) Ежегодная экспедиция международной группы ученых исследует ледовый щит в одном из районов Антарктики. Обычно этот район представляет из себя обширное плато, но в

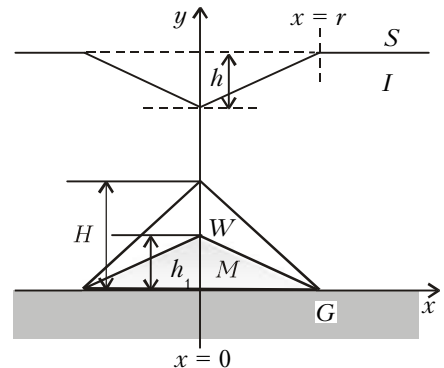


Рис.5. Вертикальное центральное сечение конической впадины в ледяном щите; S – поверхность льда, G – земля, I – ледяной щит, M – магма, W – вода

этом раз ученые обнаружили глубокую кратерообразную впадину в форме перевернутого конуса глубиной  $h = 100 \text{ м}$  и радиусом  $r = 500 \text{ м}$  (рис.5). Толщина льда в этом месте  $2000 \text{ м}$ . После дискуссии ученые пришли к выводу, что скорее всего под щитом произошло небольшое вулканическое извержение. Небольшой объем магмы (расплавленной породы) проник через нижнюю кромку ледяного щита, затвердел и остыл, растопив некоторое количество льда. Ученые пытаются оценить объем этого «вторжения» (проникновение магмы под ледяной щит) и объяснить, что произошло с растопленной водой, следующим образом.

Предположим, что лед двигался только вертикально. Будем считать также, что вначале магма была в полностью расплавленном состоянии при темпера-