

3. Два длинных рельса, имеющих конечные сопротивления, расположены на расстоянии l друг от друга и соединены конденсатором емкостью C_0 с зарядом q_0 (рис.3). Перпендикулярно плоскости рельсов создано однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} . К рельсам подлетает незаряженный конденсатор емкостью C и массой m , выводы которого начинают без трения скользить по рельсам. Найдите начальную скорость «перемычки», если она в процессе движения приходит в состояние покоя.

4. Оцените разницу показаний пружинных весов при взвешивании килограммовой гири в самолете, летящем вначале по маршруту Москва—Новосибирск, а потом Новосибирск—Москва.

5. См. задачу 5 варианта 2.

*Публикацию подготовили
Г.Меледин, М.Фокин*

*Российский государственный
педагогический университет
им. А.И.Герцена*

МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен
(математический факультет)*

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = \sqrt{|x-3|} - 1$.
а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции $g(x) = x \cdot f^2(x)$.

в) Пересекаются ли графики функций $f(x)$ и $h(x) = \sqrt{2|x-3|} - 1$?

2. Решите неравенство

$$\log_{1/2}(9^x - 3^{x+1}) \geq -2.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} = 2 \operatorname{ctg}^2 x,$$

содержащиеся в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; 8\right]$.

4. Найдите площадь равнобокой трапеции, у которой основания имеют длины 12 и 20, а диагонали взаимно перпендикулярны.

5. Радиус круга, описанного около основания правильной треугольной пирамиды, равен R , а плоский угол при ее вершине равен α . Определите ребро куба, площадь полной поверхности которого равна площади полной поверхности пирамиды.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = \frac{3}{\log_2(x+3)}$.

а) Найдите область определения этой функции.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = (1+x) \cdot 8^{\frac{f(x)}{1}}.$$

в) Решите уравнение

$$f(x) \cdot \log_2(x^2 - 9) = 3.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3x}{3x+1}} > \frac{64}{27}.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 6x + \sin 2x}{1 - \cos 2x} = 0, \text{ принадлежащие}$$

$$\text{промежутку } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{9}{4}\right].$$

4. Два круга с радиусами R и r касаются внешним образом. Из центра одного круга проведена касательная к другому кругу, а из полученной точки касания проведена касательная к первому кругу. Найдите длину последней касательной.

5. Основанием прямой призмы служит равнобокая трапеция, основания которой равны a и b ($a > b$), а острый угол равен α . Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, составляет с плоскостью нижнего основания угол, равный β . Найдите объем призмы.

*Публикацию подготовили
О.Корсакова, Г.Хамов*

*Российский государственный
университет нефти и газа
им. И.М.Губкина*

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите и вычислите при $a = \sqrt{2,5}$

$$\frac{a^3 + 0,4\sqrt{0,4}}{a + \sqrt{0,4}} - \frac{a^3 - 0,4\sqrt{0,4}}{a - \sqrt{0,4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{2} - \sqrt{2}}.$$

3. Отношение девятого члена геометрической прогрессии к ее шестому члену равно $1/8$. Найдите первый член прогрессии, если ее пятый член равен 3.

4. Решите неравенство

$$0,6|x - 0,6| \geq x^2 + 0,45.$$

5. Решите неравенство

$$7^{\sqrt{x-12}} \geq 10^{6\sqrt{x-12}}.$$

6. Вычислите

$$\log_{16} 121 - \log_4(11/16).$$

7. Вычислите

$$\sin^2 13^\circ + \cos 47^\circ \cos 73^\circ.$$

8. Найдите (в градусах) наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin(x + 20^\circ) - \sin(x + 10^\circ) = \sin 5^\circ.$$

9. Найдите значение параметра a , при котором наибольшее значение функции

$$y = -x^2 + (12a + 12)x - 31a^2 - 87a + 35$$

минимально.

10. Найдите произведение корней уравнения $x^{6 \log_{27} x} = 243x^4$.

11. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведены биссектриса AP и высота CQ , точка их пересечения обозначена через M . Площади треугольников AMC и ABC относятся как 9 : 20. Найдите $\sin \angle BAC$.

12. В правильной треугольной пирамиде радиус вписанного шара равен 6, а радиус шара с центром на основании пирамиды, касающегося всех боковых граней пирамиды, равен 9. Найдите радиус шара, описанного около пирамиды.

Вариант 2

1. Вычислите при $a = \sqrt{3} - 6$

$$\frac{3\sqrt{3} - 9a + 3\sqrt{3}a^2 - a^3}{(\sqrt{3} - a)^2}.$$

2. Найдите наименьшее целое значение x , входящее в область определения функции

$$y = \log_3 \frac{9-x}{5x+43}.$$

3. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии, если известно, что ее девятый член равен 22, а разность прогрессии равна 4.

4. Решите уравнение

$$|x - 9| = |x - 11|.$$

5. Решите уравнение

$$\sqrt{64^{4-2x}} = \sqrt[3]{16^{2-4x}}.$$

6. Считая, что $\lg 2 = 0,301$, найдите $\lg 0,08$.

7. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 10 \sin\left(\frac{\pi}{6} \sin 10x\right).$$

8. Найдите (в градусах) наименьший положительный корень уравнения

$$\frac{\operatorname{tg} 22,5x}{1 - \operatorname{tg}^2 22,5x} = \frac{1}{2}.$$