Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6—8»

Мы заканчиваем очередной конкурс по решению математических задач для учащихся 6–8 классов. Решения задач высылайте в течение месяца после получения этого номера журнала по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6–8»). Не забудьте указать имя, класс и домашний адрес.

Как и прежде, мы приветствуем участие не только отдельных школьников, но и математических кружков.

Победители конкурса будут награждены грамотами и призами журнала.

16. Известно, что существует факториал, оканчивающийся ровно m нулями, но не существует факториала, оканчивающегося ровно $m - 1$ нулями. Существует ли факториал, оканчивающийся ровно $m + 1$ нулями?

(Факториалом натурального числа n называется произведение всех натуральных чисел от 1 до n, обозначается: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.)

И.Акулич

17. В таблице

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{array}$$

суммы чисел, стоящих в строках, одинаковы. Суммы чисел, стоящих в столбцах, тоже одинаковы. Докажите равенство

$$x_1x_2x_3 + y_1y_2y_3 + z_1z_2z_3 = x_1y_1z_1 + x_2y_2z_2 + x_3y_3z_3.$$

В.Произволов

18. Докажите, что если для натуральных чисел a и b справедливо неравенство $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > 0$, то $\sqrt{5} - \frac{a}{b} > \frac{1}{4ab}$.

В.Кириак

19. Обезьянки Чи-Чи и Чита нашли в джунглях кучу из 25 кокосовых орехов.

– Давай вытаскивать орехи по-очереди, – предложила Чи-Чи, – причем каждый раз из кучи можно вытаскивать такое количество орехов, которое является делителем имеющегося количества орехов в куче. Разумеется, всю кучу хватать нельзя, если только в ней не остался последний орех. Последний орех забирать можно.

– Чур, я первая! – засуетилась Чита.

Кому из обезьянок при правильной игре достанется больше орехов?

А.Жуков

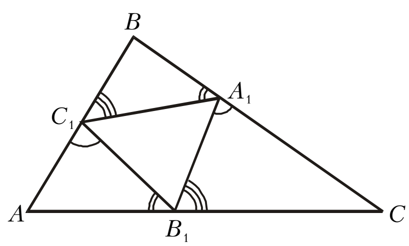
20. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1, C_1 так, что

$\angle AC_1B_1 = \angle B_1A_1C$,

$\angle BA_1C_1 = \angle C_1B_1A$,

$\angle CB_1A_1 = \angle A_1C_1B$.

Докажите, что точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC.



В.Произволов

Заключительный этап конкурса «Математика 6–8»

Светлой памяти Анатолия Павловича Савина, организатора и председателя жюри всех предыдущих конкурсов «Математика 6–8», были посвящены соревнования, проходившие, как и в прошлом году, под Рыбинском. Дело, в которое Анатолий Павлович вкладывал душу и талант, было продолжено: 60 школьников из Астрахани, Иванова, Костромы, Минска, Рыбинска, Самары, Харькова, Чебоксар и Ярославля, а также их руководители и жюри собрались в конце июня, чтобы порешать задачи, поучиться, познакомиться друг с другом, обменяться мнениями и впечатлениями.

Вот список лауреатов личной олимпиады, состоявшейся 28 июня:

дипломы I степени получили

Берштейн Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Голубов Алексей – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30, 8 кл.,
Темкин Михаил – Харьков, ФМЛ 27, 8 кл.,
Шаповалова Валентина – Иваново, лицей «Гармония», 6 кл.;

дипломы II степени получили

Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33, 8 кл.,
Григорев Сергей – Астрахань, ФМШ, 8 кл.,
Жежерун Андрей – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Куликов Егор – Ярославль, школа 84, 7 кл.,
Моисеев Игорь – Иваново, лицей «Гармония», 8 кл.,
Николаев Артем – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Овчинников Андрей – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Ульянов Федор – Иваново, школа 33, 8 кл.;

дипломы III степени получили

Бондарев Василий – Минск, школа 50, 8 кл.,
Геллер Игорь – Харьков, ФМЛ 27, 7 кл.,
Горский Дмитрий – Кострома, школа 32, 8 кл.,
Кийков Илья – Самара, университет Наяновой, 8 кл.,
Колбун Владимир – Минск, политехническая гимназия, 7 кл.,
Марковский Сергей – Минск, школа 41, 8 кл.,
Масликов Игорь – Кострома, школа 34, 7 кл.,
Меркулов Михаил – Самара, университет Наяновой, 7 кл.,
Никитова Анна – Иваново, школа 33, 8 кл.,
Стройнов Евгений – Иваново, школа 33, 8 кл.

10 команд, две из которых представляли Рыбинск, по одной – Астрахань, Иваново, Самару, Харьков, Чебоксары и Ярославль, одна («МиРы») – Минск и Рыбинск, и еще одна («АсКо») – Астрахань и Кострому, участвовали в интереснейшем турнире, финал которого состоялся 2 июля.

Бой Харьков–Ярославль показал незаурядные способности и выучку его участников; подготовили эти команды Е.Л.Аринкина, А.Л.Берштейн и С.Г.Волченков.

Первое место досталось харьковчанам, второе – ярославцам, третье – команде «АсКо» и ивановцам. Непосредственно за призерами в итоговой таблице расположилась команда Астрахани (что, несомненно, свидетельствует о прогрессе учащихся ФМШ Астрахани, ведь на предыдущем турнире они были («замыкающими»). Не повезло со жребием самарцам, но выглядели они очень достойно – сыграли с Харьковом вничью.

Как всегда, на конкурсе было много свежих и интересных задач. Приведем условия некоторых из них. Задачи 3–6 предлагались на устной олимпиаде, 1, 2, 7, 8 и 9 – на предварительных боях, 10 – в полуфинале, 11–13 – в финале. Авторами этих задач являются И.Акулич (3, 11), В.Произволов (4, 5), С.Токарев (7, 9, 13), А.Шаповалов (2, 6), В.Мищенко (8), Л.Курляндчик (10), С.Волченков (1, 12).

1. Торт имеет форму выпуклого пятиугольника со свечами в вершинах. Обязательно ли на торте найдется точка, начиная от которой прямыми разрезами торт можно разделить на 5 частей одинаковой площади, в каждой из которых есть свеча?

2. Концы каждого из 51 отрезков расположены на двух противоположных сторонах прямоугольника и делят каждую на 50 равных частей (вершины прямоугольника – тоже концы отрезков). Докажите, что среди отрезков есть равные.

3. Однажды в понедельник Петя принес в школу и дал почитать Коле сборник фантастических рассказов. Во вторник Коля отдал его Грише, Гриша в четверг отдал его Саше, Саша в следующий понедельник отдал его Володе, и так далее, причем каждый держал у себя книгу вдвое больше предыдущего. В результате книга вернулась к Пете опять в понедельник, но лишь в следующей учебной четверти. Сколько ребят успели ее прочесть?

4. В каждом из трех трехзначных чисел, сумма которых равна 1998, первую цифру поменяли местами с последней. Докажите, что сумма получившихся чисел также равна 1998, если известно, что в записи этих чисел никакие цифры, кроме 1, 8 и 9, не участвуют.

5. Сто гирек стоят в ряд, при этом массы любых соседних гирек различаются на 1 грамм. Докажите, что гирьки можно так разложить на две чашки весов, что весы будут в равновесии.

6. В клетчатом квадрате 6×6, вначале пустом, Саша закрашивает по одной клетке, вписывая в каждую только что закрашенную клетку число граничащих с нею (по стороне) ранее закрашенных клеток. Докажите, что когда будут закрашены все клетки, сумма чисел в них будет равна 60.

7. Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ при $n = 1, 2, \ldots$ Найдите a_{1998}.

8. AD и BC – основания равнобедренной трапеции $ABCD$, O – точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что окружности, описанные около треугольника ABO и CDO, пересекаются в центре окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

9. Можно ли, используя каждую из 10 цифр ровно один раз, записать натуральное число и его квадрат?

10. Натуральные числа m и n таковы, что $m^2 + n^2 + m$ делятся на mn. Докажите, что m – точный квадрат.

11. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса угла A, пересекающая серединный перпендикуляр к стороне BC в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Как по точкам A_1, B_1 и C_1 восстановить треугольник ABC?

12. Тысяче солдат присвоили порядковые номера от 1 до 1000, а затем каждый ответил на вопрос, пойдет ли он в разведку. Солдат с номером i, где $i = 1, \ldots, 1000$, согласился идти в разведку, если в отряде будет не менее $i^2/1000$ человек и не более i человек. Какую наибольшую численность может иметь разведотряд?

13. В стране, где 25 городов, три авиакомпании хотят, чтобы для любой пары городов все беспосадочные авиарейсы между этими городами осуществлялись только одной из авиакомпаний, однако любая авиакомпания могла бы доставлять пассажиров из любого города в любой другой с посадкой не более чем в одном промежуточном городе. Докажите, что это осуществимо.

Отметим, что второй год подряд успешным своим проведением конкурс обязан Управлению по делам образования и молодежи Рыбинска; особой же благодарности заслуживают Н.А.Брянкина (заместитель начальника Управления) и А.Н.Морозов (руководитель Рыбинского филиала Ярославской областной заочной математической школы). Радушные хозяева турнира наградили членов команды-победительницы ценными подарками; были установлены и два специальных приза: «лучшему игроку» (его получил Михаил Берштейн) и «лучшему шестикласснику» (Валентина Шаповалова). Жюри также выражает благодарность Московскому институту развития образовательных систем (МИРОС, директор – А.М.Абрамов) за предоставление книг для призов победителям.

С.Токарев