Сколько интервалов на прямой $y = 2 - x$ образует ортогональная проекция этой фигуры на указанную прямую?

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$3 \cdot \sqrt{|x+1| - 3} \geq \sqrt{x^2 - 2x - 3}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}\left(10x^2 + x - 2\right) \leq 0.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\cos x + 3\sqrt{1-\sin^2 x}} + 11 \cdot 2^{2\cos x} - 34 = 0.$$

4. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается основания AC в точке D и боковой стороны AB в точке E. Точка F – середина стороны AB, а точка G – точка пересечения окружности и отрезка FD, отличная от D. Касательная к окружности, проходящая через точку G, пересекает сторону AB в точке H. Найдите угол BCA, если известно, что $FH:HE = 2:3$.

5. При каких значениях параметра α система

$$\begin{cases} \cos^2(\pi xy) - 2\sin^2(\pi x) - 3\sin^2(\pi y) - \\ \qquad - 2 + \mathrm{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \cos(\pi xy) - \dfrac{3}{2}\sin^2(\pi x) - 2\sin^2(\pi y) - \\ \qquad - \dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}(\pi\alpha) = 0, \\ \log_2\left(1 + 4\sin^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{4} - \dfrac{\pi}{16}\right) - x^2 - y^2\right) \leq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения?

6. Дана пирамида $ABCD$. Сфера касается плоскостей DAB, DAC и DBC в точках K, L и M соответственно. При этом точка K находится на стороне AB, точка L – на стороне AC, точка M – на стороне BC. Известно, что радиус сферы равен 3, $\angle ADB = 90°$, $\angle BDC = 105°$, $\angle ADC = 75°$. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$2x > \frac{5x+3}{|x+2|}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2(5-x) \cdot \log_{(x+1)}\frac{1}{8} \geq -6.$$

3. Решите уравнение

$$\left|\sin^3 x\right| + 13\cos^3 x - \cos x = 0.$$

4. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK:KD = 1:2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны $\dfrac{\pi}{6}$, а расстояние от точки K до бокового ребра равно $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$. Найдите объем пирамиды.

5. Найдите все значения параметра a, при которых существуют $(x;y)$, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} \max(2-3y,\ y+2) \leq 5, \\ \left(a^2 + \dfrac{6}{\pi}\arccos\sqrt{1-x^2} - \right. \\ \left. -16 - \dfrac{2}{\pi^2}\arcsin x \cdot (\pi + 2\arcsin x)\right)^{1/2} \geq \\ \qquad \geq y^2 + 2ay + 7. \end{cases}$$

6. В остроугольном треугольнике ABC биссектриса AD делит пополам отрезок OH, где O – центр описанной окружности, H – точка пересечения высот. Известно, что $AC = 2$, $AD = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности.

Вариант 4

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \sin 3x = \sin 2x.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3(x-2) - \log_9\left(x^2 - 10x + 25\right) = \log_3 2.$$

3. Решите неравенство

$$9^x - 2^{\frac{2x+1}{2}} < 2^{\frac{2x+7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Медианы AM и CN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, $AC = b$. Найдите расстояние от точки O до прямой AC.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + |x + y - 1| = 0, \\ y - 3 + \sqrt{x - y + 6} = 0. \end{cases}$$

6. На отрезке AB взята точка C, отрезки AB и CB служат диаметрами окружностей. Хорда AM касается меньшей окружности в точке D. Прямая BD пересекает большую окружность в точке N, $\angle DAB = \alpha$, $AB = 2R$. Найдите площадь четырехугольника $ABMN$.

7. Для любых допустимых значений a решите неравенство

$$\log_a\left(3a^x - 5\right) < x + 1.$$

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ($AA_1 \| BB_1 \| CC_1$) угол между прямыми AC_1 и A_1B равен α, $AA_1 = 2$. Найдите AB.

Вариант 5

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$4^x + 2^x - 2 = 0.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{x+3} > x + 1.$$

3. Решите систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x-y) + 2 = 0, \\ z^2 + xz + yz - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\sin x(\cos 2x + \cos 6x) + \cos^2 x = 2.$$

5. Диаметр AB и хорда CD окружности пересекаются в точке E, причем $CE = DE$. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке K. Отрезки AK и CE пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника CKM, если $AB = 10$, $AE = 1$.

6. Решите уравнение

$$\log_2(4x+1)\log_5(4x+4) + \\ + \log_3(4x+2)\log_4(4x+3) = \\ = 2\log_3(4x+2)\log_5(4x+4).$$

Вариант 6

(биологический факультет)

1. Вычислите

$$\log_{\left(b^3 \sqrt[7]{a^5}\right)}\left(\frac{\sqrt[7]{a}}{b \cdot \sqrt{b}}\right),$$

если $\log_b a = \sqrt{3}$.

2. Решите неравенство

$$\left|x^2 + x - 2\right| + |x+4| \leq x^2 + 2x + 6.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cdot \sin x \cdot \left(\cos x - \frac{2}{3}\right).$$

4. Основанием пирамиды $SABC$ является прямоугольный треугольник ABC (C – вершина прямого угла). Все боковые грани пирамиды наклонены к ее основанию под одинаковым углом, равным $\arcsin\dfrac{5}{13}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если SO – высота пирамиды, $AO = 1$, $BO = 3\sqrt{2}$.