Вписанные многоугольники

М.ПАНОВ, А.СПИВАК

МЫ РАССКАЖЕМ О ЗАДАЧЕ из «Задачника «Кванта» – объясним, откуда она возникла, покажем ее разнообразные связи с другими задачами.

М1624. *Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, …, A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи: а) n = 4; б) n = 8; в) n = 6; г) n = 5 или 7; д) n > 8.*

Поскольку «связи» даже более красивы и интересны, чем сама задача, кому-то покажется, что она – только повод для разговора. Наверное, так оно и есть. Но один из нас узнал обо всем этом, будучи школьником и заинтересовавшись этой задачей. Приглашаем повторить этот путь.

Свойство правильного треугольника

Если есть ради чего стараться, то не грех и перестараться.

Начнем с классической задачи. Она столь замечательна, что вошла в «Задачник «Кванта» одной из первых.

Задача 1 (М18, а). *На дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X. Докажите, что AX + BX = CX (рис.1).*

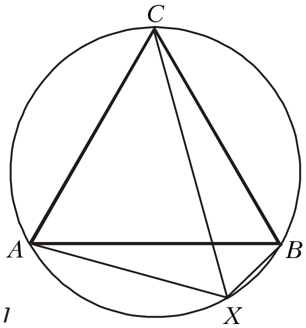

Рис. 1

Первое решение (для восьмиклассников – с равными треугольниками и теоремой о вписанном угле). Отложим на XC отрезок XY, равный отрезку XB (рис. 2).

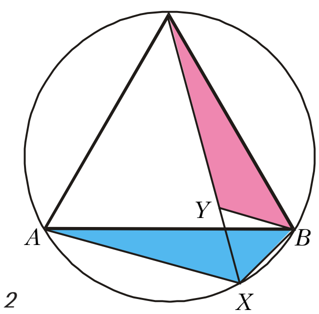

Рис. 2

По теореме о вписанном угле, $\angle CXB = \angle CAB = 60°$. Поэтому ΔXBY правильный. При повороте вокруг B на 60° точка C переходит в A, точка Y – в X. Поэтому треугольники CBY и ABX равны, $CY = AX$. Следовательно,

$$CX = CY + YX = AX + BX.$$

Второе решение (для десятиклассников – с тригонометрическими формулами). Проведем диаметр XX' (рис. 3). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$. Тогда треугольники XAX', XBX', XCX' – прямоугольные с гипотенузой XX'. Следовательно,

$$AX = XX'\cos(60°-\varphi),$$

$$BX = XX'\cos(60°+\varphi),$$

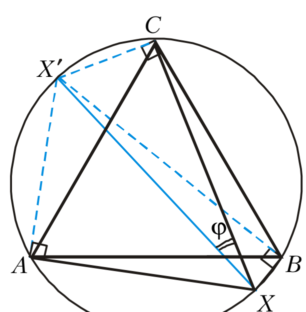

Рис. 3

откуда

$$AX + BX = XX'\left(\cos(60°-\varphi) + \cos(60°+\varphi)\right) = XX' \cdot 2\cos 60° \cos\varphi = XX'\cos\varphi = CX.$$

Третье решение (для учеников математических классов – с теоремой Птолемея). Для вписанного четырехугольника $AXBC$ запишем теорему Птолемея:

$$AX \cdot BC + BX \cdot AC = CX \cdot AB.$$

Разделив на длину стороны треугольника ABC, получим требуемое.

Упражнение 1. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P. Докажите, что $AP + CP = \sqrt{2}BP$.

Свойство шестиугольника

Мы решели задачу 1. А сейчас переформулируем ее, изменив до неузнаваемости.

Задача 2. *Если диагонали AD, BE и CF вписанного шестиугольника ABCDEF пересекаются в точке P под углом 60° друг к другу (рис.4), то*

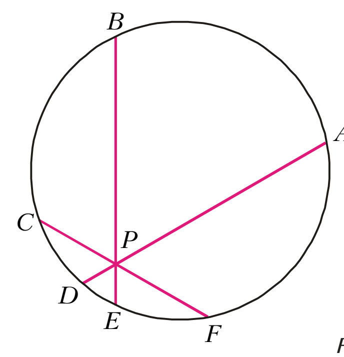

Рис. 4

$$AP + CP + EP = BP + DP + FP. \quad (1)$$

Решение. Проведем через точку P окружность, концентрическую описанной окружности шестиугольника (рис. 5). Тогда

$$AP + CP + EP = AX + XP + CP + EP,$$

$$BP + DP + FP = BY + YP + DP + FZ + ZP.$$

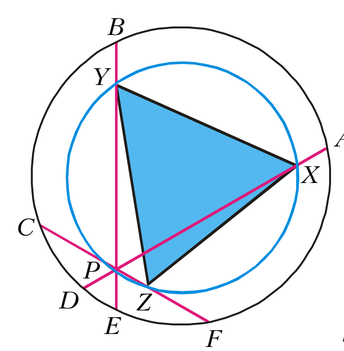

Рис. 5