ружность радиусом 1, в некоторые вершины этого многоугольника проведены векторы. Может ли длина суммы этих векторов равняться а) 1998; б) $\sqrt{1998}$?*

Ответ на оба вопроса задачи утвердительный. Начнем построение примера к пункту а). Длина суммы $\overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{OB_4}$ векторов рисунка 2 равна 2. Чтобы построить систему векторов, длина суммы которых равна 3, помимо шестиугольника рассмотрим пятиугольник (рис.3).

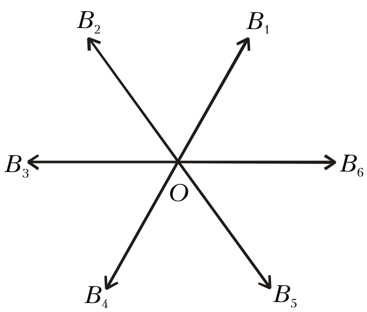

Рис.2

Благодаря формуле (1) сумма четырех векторов $\overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OC_2} + \overrightarrow{OC_3} + \overrightarrow{OC_4}$, проведенных из центра в четыре вершины правильного пятиугольника, противоположна вектору $\overrightarrow{OC_5}$, соединяющему центр с пятой вершиной пятиугольника. И вершины пятиугольника, и вершины шестиугольника лежат в вершинах правильного 30-угольника.

Аналогично, чтобы построить систему векторов, длина суммы которых равна 4, добавим еще 6 векторов $\overrightarrow{OA_1}, \ldots, \overrightarrow{OA_6}$, соединяющих центр с вершинами семиугольника (см. рис.1). Продолжая в таком же духе, мы и получим пример к пункту а).

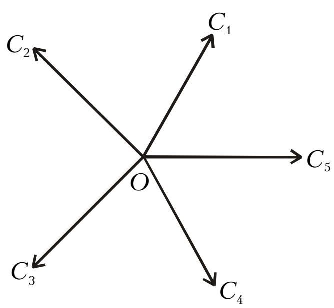

Рис.3

Формальное описание изложенной конструкции таково. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_{1998}$ – попарно взаимно простые числа. Рассмотрим правильный $n_1 n_2 \ldots n_{1998}$-угольник. Зафиксируем некоторую его вершину A. Назовем «выделенным» n_i-угольником ($i = 1, \ldots, 1998$) правильный n_i-угольник, одной из вершин которого является точка A, а другие вершины являются вершинами $n_1 n_2 \ldots n_{1998}$-угольника. Выделенные n_i-угольник и n_j-угольник ($i \neq j$) имеют, благодаря взаимной простоте чисел n_i и n_j, единственную общую вершину A. Рассмотрим векторы, идущие из центра O многоугольника во все вершины всех выделенных n_i-угольников, кроме A. Их сумма равна $-1998\overrightarrow{OA}$, что и требовалось.

б) В следующем разделе статьи мы построим с привлечением комплексных чисел сумму длиной $\sqrt{n}$ при любом натуральном n, а пока предлагаем ряд упражнений. Тот, кто справится с ними, получит решение пункта б), не использующее никаких выходящих за рамки школьной программы понятий (но, к сожалению, существенно использующее специфику числа $\sqrt{1998}$).

Упражнение 1. Воспользовавшись приемом решения пункта а), докажите, что если можно представить в искомом виде (т.е. в виде суммы векторов, проведенных из центра вписанного в единичную окружность правильного многоугольника в его вершины) некоторый вектор $\vec{v}$, то можно представить в таком виде и вектор $a\vec{v}$, где a – натуральное число.

Упражнение 2. Докажите, что если можно представить в искомом виде вектор длиной x, то можно представить в таком виде и вектор длиной а) $x\sqrt{a^2+b^2}$, б) $x\sqrt{a^2+2b^2}$, где a и b – натуральные числа.

Замечание. Если в искомом виде можно представить некоторый вектор длиной $\sqrt{m}$, то можно представить и вектор длиной $\sqrt{2m}$. Поэтому в дальнейшем мы можем искать вектор длиной $\sqrt{n}$ только для нечетных n.

Упражнение 3. Решите пункт б) задачи М1648.

Указание. $\sqrt{1998} = \sqrt{3^2+18^2} \cdot \sqrt{2^2+2\cdot 1^2}$.

Корни из единицы

Сейчас мы запишем равенство (1) в довольно неожиданном виде. Для этого рассмотрим уравнение $z^n - 1 = 0$ и разложим его левую часть на множители:

$$(z-1)\left(z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1\right)=0.$$

Значит, если $z^n = 1$ и $z \neq 1$, то

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1=0. \qquad (2)$$

В статье «Многочлены деления круга» («Квант» №1 за 1998 год) рассказано о том, что уравнение $z^n = 1$ имеет n решений – «корней из единицы». Они являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность, и имеют вид

$$\zeta^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n},$$

где $\zeta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Сумма всех корней n-й степени из единицы (при $n > 1$) равна 0:

$$1+\zeta+\ldots+\zeta^{n-2}+\zeta^{n-1}=0.$$

Это, по сути, и есть равенство (1)!

Зная все n корней $\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^n (=1)$ многочлена $z^n - 1$, мы можем разложить его на множители:

$$z^n-1=(z-\zeta)\left(z-\zeta^2\right)\ldots\left(z-\zeta^{n-1}\right)(z-1). \qquad (3)$$

Сократив обе части на $z - 1$, получим

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\ldots+z+1=(z-\zeta)\left(z-\zeta^2\right)\ldots\left(z-\zeta^{n-1}\right). \qquad (4)$$

Подставим в последнее равенство вместо z число 1:

$$n=(1-\zeta)\left(1-\zeta^2\right)\ldots\left(1-\zeta^{n-1}\right). \qquad (5)$$

Упражнение 4. Чтобы получить равенство (5), мы подставили $z = 1$ в равенство (4), которое получилось делением на $z - 1$ обеих частей равенства (3). Объясните, почему так делать можно, хотя «на ноль делить нельзя».

Пусть n – нечетное число. Тогда все множители правой части (5) можно разбить на комплексно сопряженные (т.е. симметричные относительно оси абсцисс) пары чисел $1-\zeta^k = 1 - \cos\frac{2\pi k}{n} - i\sin\frac{2\pi k}{n}$ и $1-\zeta^{n-k} = 1 - \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$ (рис. 4). Взяв из каждой пары сопряженных множителей только один множитель, мы получим число, модуль которого – квадратный корень из