«Невозможно отрицать глубокое значение, которое имеют определенные проблемы для продвижения математической науки вообще, и важную роль, которую они играют в работе отдельного исследования», – эти слова были сказаны Гильбертом во вступительной части его доклада, посвященного формулировкам математических проблем.

Нашему веку досталось от прошлых времен несколько великих проблем.

Самая старая из них – проблема Ферма – о неразрешимости в натуральных числах диофантова уравнения $x^n + y^n = z^n$ при $n > 2$. Она была поставлена в XVII веке. Две знаменитые проблемы в теории чисел – Гольдбаха и Эйлера – пришли из XVIII века. *Верно ли, что каждое нечетное число, большее 6, есть сумма трех простых?* С этим вопросом в 1742 году обратился к Эйлеру Христиан Гольдбах. Эйлер в ответ заметил, что для ответа на поставленный вопрос достаточно доказать, что *каждое четное число является суммой двух простых.*

Из проблем XIX века наиболее известны проблемы Римана о нулях дзета-функции и проблема континуума, поставленная Кантором.

В XX веке наиболее известен цикл проблем Гильберта, о котором мы упоминали. На первом месте в списке гильбертовских проблем стояла проблема континуума: *существует ли такое несчетное множество, которое можно однозначно отобразить в единичный отрезок, но при этом единичный отрезок нельзя отобразить однозначно в это множество? Иным словами, существует ли множество, большее по мощности, чем счетное, но меньшее, чем отрезок?*

Проблема Ферма оказалась разрешенной в нашем веке, правда в самом конце его. Проблема Гольдбаха оказалась «почти» решенной И.М.Виноградовым, доказавшим (1937), что любое *достаточно большое* нечетное число представимо суммой трех простых. Проблемы Эйлера и Римана стоят и по сей день.

Расскажем о решении нескольких проблем Гильберта. В значительной доле Гильберт оказался хорошим провидцем, но в нескольких случаях интуиция изменила ему. Как правило, это оказалось напрямую связанным с тем оптимистическим взглядом на мир, который был свойствен людям, родившимся в прошлом столетии.

Заостряя вновь внимание на проблеме континуума, Гильберт исходил из возможности ее разрешения в ту или иную сторону: да или нет. Но выяснилось, что она не может быть ни доказанной, ни опровергнутой методами математической логики и одной общепринятой аксиоматической теорией множеств. То, что она не может быть опровергнута, доказал Гёдель (1936), обратную теорему доказал Коэн (1963).

Убежденность Гильберта в неограниченных возможностях человеческого разума, нашедшая свое выражение в его крылатом афоризме: «мы хотим знать, мы будем знать», придали ему «уверенность в том, что каждая определенная математическая проблема непременно должна иметь решение», и это побудило его поставить 10-ю проблему: «указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное уравнение в целых рациональных числах» (или иначе: доказать, что существует алгоритм, который по данному многочлену P от n переменных с целыми коэффициентами распознавал бы, имеет ли уравнение $P = 0$ решение в целых числах или нет). Решение этой проблемы также оказалось отрицательным (Матиясевич, 1970).

Гильберт был настолько уверен, что функции трех переменных устроены сложнее, чем функции двух переменных, что высказал гипотезу, что некоторая *конкретная* функция трех переменных не представима в виде суперпозиции непрерывных функций двух переменных (13-я проблема). Гипотеза Гильберта оказалась опровергнутой весьма радикально: оказалось, что с помощью только одной и притом простейшей функции двух переменных – сложения $(x, y) \to x + y$ – и непрерывных функций одной переменной можно восстановить любую функцию n переменных (Колмогоров, Арнольд, 1957).

Рождение топологии сопровождалось великими свершениями. Вот несколько примеров. Окружность делит плоскость на две части: нельзя точку, лежащую вне круга, соединить с его центром и не пересечь окружность. Французский математик Жордан в XIX веке доказал, что гомеоморфный (т.е. непрерывный и взаимно однозначный) образ окружности также делит плоскость на две части. Голландский математик Брауэр обобщил этот результат на случай гомеоморфного образа многомерной сферы. При этом он использовал и развил исходные идеи Пуанкаре. В частности, он доказал замечательный результат, называемый *теоремой Брауэра о неподвижной точке,* который в простейшем случае выглядит так: *при непрерывном отображении плоского круга в себя есть неподвижная точка.* Дальнейшее развитие топологии привело к замечательным обобщениям этих результатов в трудах американского ученого Александера, П.Александрова, Колмогорова, Понтрягина и других.

Несколько ярких топологических проблем поставил Пуанкаре. Такова, например, проблема о трех замкнутых геодезических. Если взять гладкий камешек и попытаться надеть на него аптечную резиночку, то в случае удачи (если резиночка не соскочит) это будет означать, что вы нашли замкнутую геодезическую. Для любого гладкого овалоподобного тела обязательно найдутся три замкнутые геодезические – в этом состояла гипотеза Пуанкаре, – причем это число не может быть увеличено (в частности, для эллипсоида с разными осями оно в точности равно трем). Эта проблема была решена советскими математиками Люстерником и Шнирельманом.

* * *

Мы рассказали лишь о некоторых событиях первой половины нашего великого и многострадального века, в которых математике было суждено сыграть большую роль; коснулись также и некоторых тем из нашего «внутреннего мира». Хотелось бы надеяться на то, что читатель ощутил грандиозность свершенного в этот незначительный по меркам Истории отрезок времени. Мы надеемся опубликовать в нашем журнале статьи, посвященные открытиям, сделанным в недавнее время, чтобы у юного читателя возникло чувство гордости за тот отрезок времени, в котором протекает его жизнь. Автор этой статьи много раз испытывал это чувство, когда осознавал себя современником Эйнштейна, Колмогорова, Сахарова и других гениев нашего века.