## Научные направления в математике начала и конца века

Представление о том, какие направления преобладали в математике в начале XX века, дает список секций на Втором парижском математическом конгрессе 1900 года (он оставил особый след в истории математики благодаря тому, что на этом конгрессе Давид Гильберт выступил с докладом о математических проблемах). На этом конгрессе работали четыре основные секции: арифметики и алгебры, анализа, геометрии, механики и математической физики, и еще две: истории и библиографии и преподавания и методологии.

Об изменениях, произошедших в математике в XX веке, свидетельствует перечень секций современных конгрессов: математическая логика и основания математики; алгебра; теория чисел; геометрия; топология; алгебраическая геометрия; комплексный анализ; группы Ли и теория представлений; вещественный и функциональный анализ; теория вероятностей и математическая статистика; дифференциальные уравнения с частными производными; обыкновенные дифференциальные уравнения; математическая физика; численные методы и теория вычислений; дискретная математика и комбинаторика; математические аспекты информатики; приложения математики к нефизическим наукам; история математики; преподавание математики.

Многие из названных направлений родились или оформились лишь в XX столетии. При этом произошла смена приоритетов. Если до второй мировой войны основным направлением в математике был анализ и его различные ответвления (уравнения математической физики, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного), то после войны вкусы многих математиков стали смещаться в сторону топологии, многомерного комплексного анализа, алгебраической геометрии, теории групп Ли и теории представлений и т.п. Самый шумный успех и самые престижные премии в подавляющем большинстве стали получать математики, работающие именно в этих областях.

Но эта смена приоритетов произошла в те времена, которые находятся за пределами избранного нами периода. Какие же новые направления родились в начале нашего века? Прежде всего надо назвать три новые ветви – *функциональный анализ, топологию и теорию функций.* С краткого обсуждения этих направлений начнем наш обзор достижений математики в первой половине нашего столетия.

## Функциональный анализ

Одним из важнейших событий развития математики, происходившего в период от начала века до первой мировой войны, было рождение функционального анализа, в котором воссоединились многие концепции классического анализа, линейной алгебры и геометрии.

Еще в конце прошлого века были обнаружены аналогии между теорией систем линейных уравнений конечного числа переменных и их бесконечномерных аналогов – линейных интегральных уравнений. Решающий сдвиг в теории был сделан Фредгольмом в 1900 году. Интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_a^b K(t,\tau) x(\tau) d\tau = y(t), \quad (1)$$

где $y(\cdot)$ – известная функция, а $x(\cdot)$ – искомая, Фредгольм заменил системой линейных уравнений

$$x_i - \lambda h \sum_{j=0}^{n} k_{ij} x_j = y_i, \qquad (2)$$

рассмотрев вместо интеграла интегральные суммы:

$$t_i = a + ih,\ x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),$$
$$k_{ij} = K(t_i, \tau_j),\ \ 1 \le i,\ j \le n.$$

Методы решения систем линейных уравнений были разработаны в XVIII веке (о них дается первоначальное понятие в школе, а в полном объеме – на начальной стадии обучения в университете). Применив эти методы и перейдя к пределу, Фредгольм нашел условия разрешимости и алгоритмы нахождения решений уравнений (1). Это послужило стимулом к разработке теории, сочетавшей в себе элементы алгебры и геометрии, но в бесконечномерных пространствах. Так родился *линейный функциональный анализ.*

Существенным разделом функционального анализа явилась также *теория квадратичных форм*, начала которой были заложены Гильбертом (1904–1906). Квадратичная форма

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

после поворота осей приводится к диагональному виду $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$. Гильберт доказал аналог этого утверждения для квадратичной формы

$$Q(x(\cdot)) = \int_a^b \int_a^b K(t,\tau) x(t) x(\tau) dt\, d\tau,$$
$$K(t,\tau) = K(\tau, t),$$

где аргументом является не вектор $x = (x_1, x_2)$, а функция $x(\cdot)$ с интегрируемым квадратом:

$$\int_a^b x^2(t) dt < \infty.$$

Совокупность таких функций была названа *гильбертовым пространством* (ее обозначают $L_2$). Теория квадратичных форм в гильбертовых пространствах явилась математической базой квантовой механики.

## Рождение топологии

Слово «топология» относят ныне к двум разделам математики. И изначально для каждого из них имелись свои определения при слове «топология». Одну топологию, родоначальником которой был Пуанкаре, называли долгое время *комбинаторной*, за другой (у истоков ее были исследования Кантора) закрепилось название *общей* или *теоретико-множественной.*

Общая топология примыкает к теории множеств и лежит в основании математики (в соответствии с планировкой этой науки, которая была намечена последователями Кантора – Гильбертом, Г.Вейлем и др.). Это аксиоматическая теория, призванная исследовать такие понятия, как «предел», «сходимость», «непрерывность» и т.п. Основы общей топологии в нашем веке были заложены немецким математиком Хаусдорфом, польским математиком Куратовским, знаменитым представителем московской школы П.С.Александровым и другими.

Комбинаторная топология – это раздел геометрии. Она изучает свойства геометрических фигур, остающихся неизменными при взаимно однозначных и непрерывных отображениях. Кантор построил взаимно однознач-