Межобластная заочная математическая олимпиада школьников

Всероссийская школа математики и физики «АВАНГАРД» совместно с Министерством общего и профессионального образования РФ и при участии журнала «Квант» проводит Межобластную заочную математическую олимпиаду для школьников 6—10 классов. Срок присылки решений – до 30 января 1999 года.

Чтобы принять участие в олимпиаде, нужно решить предлагаемые ниже задачи, аккуратно оформить решения (каждую задачу – на отдельном листочке) и отослать их по почте в обычном конверте в Оргкомитет олимпиады по адресу: 115551 Москва, Ореховый б-р, д.11, корп. 3, ВШМФ «АВАНГАРД», Оргкомитет олимпиады.

Для переписки и сообщения Вам результатов проверки в письмо обязательно вложите:

– пустой конверт с маркой с заполненным домашним адресом;

– дополнительную почтовую марку (марки) достоинством в 1 руб.;

– краткую анкету: возраст, класс и номер школы, фамилия учителя математики.

Не забудьте сделать пометку, что информацию об олимпиаде Вы узнали из журнала «Квант».

Заметим, что для участия в олимпиаде необязательно решить все задачи – достаточно хотя бы одной. Победители олимпиады получат призы, среди которых несколько бесплатных подписок на журнал «Квант». Оргкомитет приложит все усилия к тому, чтобы поощрения и дипломы получили все приславшие хотя бы одно правильное решение. Списки победителей будут опубликованы в журнале «Квант».

Победители, приславшие наиболее интересные решения, будут приглашены к участию в традиционной очередной Всероссийской конференции одаренных школьников, которая состоится в Москве, и, возможно, войдут в команду для участия в международных встречах.

Все учащиеся, приславшие свои работы в Оргкомитет олимпиады, независимо от результатов их проверки, получат приглашение учиться на заочном отделении Всероссийской школы математики и физики «АВАНГАРД» в 1999/2000 учебном году на льготных условиях.

ВНИМАНИЮ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ 6—10 КЛАССОВ! ПРИГЛАСИТЕ К УЧАСТИЮ В ОЛИМПИАДЕ СВОИХ УЧЕНИКОВ!

Задачи олимпиады

6 класс

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\, 159 \\ *** \\ \hline *** \\ *** \\ 3** \\ \hline ***29 \end{array}$$

2. Определите пропущенные числа и найдите сумму:

$$2 + 6 + 12 + 20 + \ldots + 342.$$

3. Замостите плоскость одинаковыми прямоугольными треугольниками.

4. Последовательностью цифр

140120061401201О1201

зашифровано слово следующим образом: каждой букве поставлено в соответствие двузначное число. Расшифруйте.

5. Автомобильный номер в стране Авангардии состоит из двух букв русского алфавита и пяти четных цифр. Сколько автомобилей можно зарегистрировать в Авангардии?

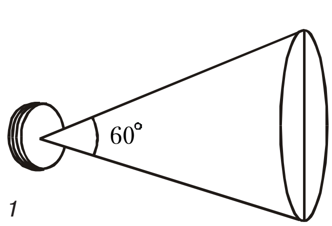

Рис. 1

6. Куб распилили на две части. Какие многоугольники могут быть на срезе?

7. Луч прожектора представляет собой конус с углом раствора 60° (рис.1). Можно ли с помощью восьми таких прожекторов осветить все пространство?

7 класс

1. Восстановите пропущенные цифры:

$$\begin{array}{r} \times\, 941 \\ *** \\ \hline **6* \\ **** \\ \hline 5**3** \end{array}$$

2. Выразите s из соотношения

$$3s + p = \frac{9s^2 - p^2}{r + 3s}.$$

3. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}.$$

4. Докажите, что уравнение

$$\overline{abcd} - \overline{dcba} = 1999,$$

где $abcd$ – четырехзначное число, записанное цифрами a, b, c, d, не имеет решений.

5. На планете Авангард суша занимает $4/7$ поверхности планеты, а остальное – океан. Докажите, что авангардцы могут прорыть прямой тоннель через центр планеты, выходящий в обе стороны на сушу.

6. Мышь грызет куб сыра размером 3×3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышь съест какой-либо кубик, она переходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли она съесть весь куб, кроме центрального кубика?

7. См. задачу 7 для 6 класса.

8 класс

1. Что больше: 4^{500} или 5^{400}?

2. Замостите плоскость одинаковыми прямоугольными треугольниками.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 1999x + y + z = 2000, \\ x + 1999y + z = 2000, \\ 2000x + 2000y + 2z = 4000. \end{cases}$$

4. Существует ли 1999 идущих подряд составных чисел?

5. Решите в целых числах уравнение

$$x^3 - x = 3y^2 + 1.$$

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Куб распилили на две части. Какие многоугольники могут быть на срезе? Какие из них могут быть правильными?

9 класс

1. Докажите тождество

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt[3]{\frac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y + y^2x = 180, \\ x^3 + y^3 = 189. \end{cases}$$

3. Решите в целых числа уравнение

$$\operatorname{tg}\pi x + \operatorname{tg}\pi y = 2\sin\pi(x+y),$$

где x и y выражены в радианах.

4. Какова может быть наименьшая степень многочлена, график которого показан на рисунке 2?

5. Найдите наибольшее натуральное n такое, что произведение всех натуральных чисел от 1 до 1999 делится на 12^n.

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Изобразите на координатной плоскости Oab множество точек (a, b) таких, для которых уравнение

$$(ab+1)x^2 + (a+b)x + 1 = 0$$

относительно переменной x имеет неотрицательные корни.

10 класс

1. Решите неравенство

$$|x| + |x+1| \le 1.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + y^2 + x = 5y, \\ x^2 + xy = 6y. \end{cases}$$

3. Решите в целых числах уравнение

$$\left(\overline{xy}\right)^2 - \left(\overline{yx}\right)^2 = 1999,$$

где $\overline{xy}$ – двузначное число, записанное цифрами x и y.

4. Изобразите на координатной плоскости Oxy множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют неравенству $\sin^2 x + \sin^2 y \le 0$.

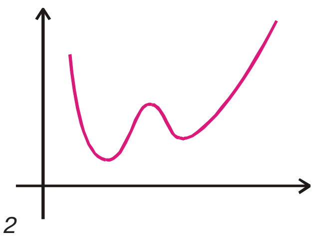

Рис. 2

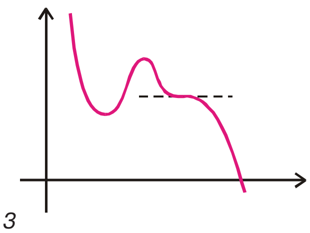

Рис. 3

5. Каковы могут быть наименьшие степени многочленов, графики которых показаны на рисунках 2 и 3?

6. См. задачу 7 для 6 класса.

7. Стороны равностороннего единичного треугольника разделены на три равные части. На каждой из средних частей, как на сторонах, построены равносторонние треугольники с вершинами вне первоначального. С каждой из сторон получившегося многоугольника проведена такая же операция, и так далее до бесконечности. Найдите площадь получившейся фигуры.