Диагонально-перпендикулярное отображение четырехугольников

А.ЗАСЛАВСКИЙ

ПОВОДОМ к написанию этой заметки послужила задача М1154 из «Задачника Кванта»: *докажите, что если четырехугольник является вписанным в окружность и описанным вокруг другой окружности, то прямая, соединяющая центры этих окружностей, проходит через точку пересечения диагоналей четырехугольника.*

Эту задачу можно решать разными способами. В частности, одно из решений приводится в «Кванте» (№8 за 1989 год). Нашей же целью будет формулировка и доказательство более общего утверждения, в котором будет рассматриваться произвольный четырехугольник. Основным инструментом для нас будет диагонально-перпендикулярное отображение, которое мы определим следующим образом:

Определение. Возьмем произвольный четырехугольник $ABCD$ и из точки O пересечения его диагоналей опустим перпендикуляры OK, OL, OM, ON на его стороны. Четырехугольник $KLMN$ будем называть *образом* четырехугольника $ABCD$ при *диагонально-перпендикулярном отображении* (рис.1).

Примечание 1. Строго говоря, наше определение не является вполне корректным, так как четырехугольник $KLMN$ может оказаться вырожденным: три или даже все четыре его вершины могут лежать на одной прямой. Впрочем, для дальнейшего изложения это несущественно.

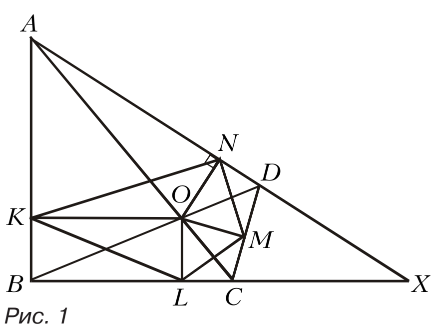

Рис. 1

Исследуем свойства нашего отображения. Прежде всего выясним, можно ли восстановить четырехугольник $ABCD$ по четырехугольнику $KLMN$.

Продолжим на рисунке 1 стороны BC и AD до их пересечения в точке X. Очевидно, что $\angle BXA = \angle BOA - \angle OBC - \angle OAD$. Но четырехугольник $OKBL$ – вписанный, так как его противоположные углы прямые. Поэтому $\angle OBC = \angle LKO$. Аналогично, $\angle OAD = \angle OKN$, и значит, $\angle BXA = \angle BOA - \angle LKN$. С другой стороны, $\angle BOA = (\angle BOA + \angle COD)/2 = (\angle OBC + \angle OCB + \angle OAD + \angle ODA)/2 = (\angle OKL + \angle OKN + \angle OML + \angle OMN)/2 = (\angle LKN + \angle LMN)/2$. Таким образом, $\angle BXA = (\angle LMN - \angle LKN)/2$, и следовательно, $\angle LON = \pi - (\angle LMN - \angle LKN)/2$. Аналогично, $\angle KOM = \pi - (-\angle KNM)/2$.

Мы видим, что четырехугольник $KLMN$ однозначно определяет точку O пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ (известны углы, под которыми видны из точки O диагонали четырехугольника). Нетрудно проверить также, что если соединить построенную таким образом точку O с вершинами $KLMN$ и провести через них перпендикуляры к соответствующим отрезкам, то диагонали получившегося четырехугольника пересекутся в точке O (непосредственное вычисление дает $\angle BOD = \angle COA = \pi$). Следовательно, диагонально-перпендикулярный образ позволяет однозначно восстановить исходный четырехугольник.

Продолжим изучение свойств диагонально-перпендикулярного отображения. Прежде всего докажем

Утверждение 1. *В четырехугольник $KLMN$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, причем центром окружности, вписанной в $KLMN$, является точка O пересечения диагоналей $ABCD$.*

Доказательство. Если четырехугольник $ABCD$ – вписанный, то углы OBC и OAD равны. Но $\angle OBC = \angle OKL$, $\angle OAD = \angle OKN$, т.е. OK – биссектриса угла K четырехугольника $KLMN$. Аналогично, точно O лежит на биссектрисах остальных углов $KLMN$, и значит, совпадает с центром вписанной в него окружности. С другой стороны, если четырехугольник $KLMN$ – описанный, то соединив центр вписанной окружности с его вершинами и построив четырехугольник $ABCD$, получим, что углы OBC и OAD равны, и точки A, B, C, D лежат на окружности.

Утверждение 1 дает возможность обобщить понятие центра вписанной окружности на четырехугольник, не являющийся описанным: будем называть квазицентром вписанной окружности четырехугольника $KLMN$ точку пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, являющегося диагонально-перпендикулярным прообразом $KLMN$.

Попробуем теперь обобщить понятие центра описанной окружности. Для этого прежде всего сформулируем

Утверждение 2. *Четырехугольник $KLMN$ является вписанным тогда и только тогда, когда диагонали четырехугольника $ABCD$ перпендикулярны.*

Доказательство. Ранее было показано, что угол между диагоналями четырехугольника $ABCD$ равен полусумме противоположных углов четырехугольника $KLMN$. Утверждение 2 является очевидным следствием этого.

Выясним, где находится центр окружности, описанной около четырехугольника $KLMN$. Продолжим отрезки OK, OL, OM, ON за точку O до пересечения с противоположными сторонами четырехугольника $ABCD$ в точках соответственно K', L', M', N'. Докажите самостоятельно следующие утверждения (рис.2):

Утверждение 3. *$K'L'M'N'$ – прямоугольник, стороны которого параллельны диагоналям $ABCD$.*

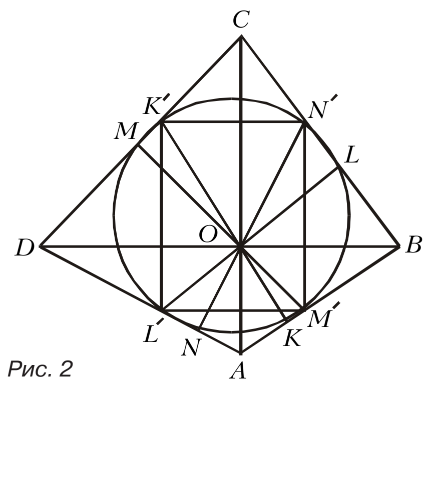

Рис. 2

Утверждение 4. *8 точек K, L, M, N, K', L', M', N' лежат на одной окружности.*

Из утверждений 3 и 4 вытекает, что центр окружности, описанной около четырехугольника *KLMN,* совпадает с точкой пересечения прямых $K'M'$ и $L'N'$. Поэтому для произвольного четырехугольника полученную таким образом точку будем называть квазицентром описанной окружности.

Примечание 2. В этом месте в наших рассуждениях вновь оказалась нестрогость. Действительно, одна или даже обе пары противоположных сторон четырехугольника *ABCD* могут быть взаимно перпендикулярными, тогда какие-то из точек K', L', M', N' не будут определены. Используя аппарат проективной геометрии, можно изменить формулировки всех утверждений, чтобы включить и эти случаи, но сейчас мы не будем этого делать.

Итак, мы обобщили понятия центров вписанной и описанной окружности на случай произвольного четырехугольника, и нам осталось выяснить, проходит ли прямая, соединяющая эти центры, через точку пересечения его диагоналей. Сформулируем этот вопрос в виде следующего утверждения:

Утверждение 5. *Из точки O пересечения диагоналей четырехугольника ABCD опущены на его стороны перпендикуляры OK, OL, OM, ON. Их продолжения за точку O пересекают противоположные стороны четырехугольника в точках K', L', M', N'. Прямые KM и LN пересекаются в точке P, $K'M'$ и $L'N'$ – в точке P'. Тогда точки P, O, P' лежат на одной прямой.*

Утверждение 5 действительно является верным. Более того, для его справедливости не требуется, чтобы отрезки *OK, OL, OM, ON* были перпендикулярны сторонам четырехугольника. Чтобы доказать это, воспользуемся центральной проекцией.

Обозначим плоскость четырехугольника *ABCD* через α. Пусть противоположные стороны четырехугольника пересекаются в точках *X* и *Y*. Возьмем произвольную плоскость α', пересекающую α по прямой, параллельной *XY,* и точку *Z*, не лежащую ни в одной из плоскостей, такую, что плоскость *XYZ* параллельна α'. Легко видеть, что при проекции из точки *Z* на плоскость α' четырехугольник *ABCD* переходит в параллелограмм. Соответственно, образы точек *K* и K', *L* и L', *M* и M', *N* и N' будут симметричны относительно образа точки *O*, и значит, симметричны будут и соединяющие их прямые и точки их пересечения *P* и P', что и требовалось доказать.

Примечание 3. Четырехугольник *ABCD* может быть невыпуклым. В этом случае его образом при центральной проекции будет не параллелограмм, а фигура, состоящая из двух ломаных (начертите ее). Однако доказательство утверждения 5 проходит и в этом случае без каких-либо изменений. Читателям, знакомым с проективной геометрией, понятно, что наша центральная проекция эквивалентна проективному преобразованию, переводящему прямую *XY* в бесконечно удаленную.

И в заключение три вопроса, ответы на которые автору неизвестны:

1. Какими еще свойствами обладает диагонально-перпендикулярное отображение (точнее, какие свойства четырехугольника *ABCD* и *KLMN* соответствуют друг другу)?

2. Обладают ли какими-либо специальными свойствами четырехугольники $K'L'M'N'$ или любой четырехугольник можно получить таким способом из хотя бы одного четырехугольника *ABCD* (то, что четырехугольник *ABCD* может быть не единственным, видно из утверждения 3)?

3. Для вписанно-описанных многоугольников выполняются соотношения:

$$1/r^2 = 1/(R+d)^2 + 1/(R-d)^2,$$

$$(R+d_1)/(R+d_1) = (R+d)^2/(R-d)^2,$$

где *R, r* – радиусы описанной и вписанной окружностей, d – расстояние между их центрами, d_1 – расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения диагоналей. Пользуясь этим соотношениями, определим для произвольного четырехугольника «квазирадиусы» описанной и вписанной окружностей (для этого должно быть $2d > d_1$, но, по-видимому, это выполняется всегда). Можно ли дать этим понятиям содержательную геометрическую интерпретацию?