Решения задач М1621—М1630, Ф1638—Ф1642

М1621. *а) В треугольнике заданы две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона c, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон a и b) окружностями делили сторону c на три равные части? б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?*

а) Пусть $D(E)$ – точка касания с отрезком AB вписанной (вневписанной) окружности; тогда $AD = BE$. Поэтому условие задачи можно переписать так: $\frac{a+c-b}{2} = = \frac{c}{3}$ (случай $\frac{2c}{3}$ мы без ограничения общности отбрасываем). Получили $c = 3b - 3a$. Если $b \ge c$ (т.е. $3a \ge 2b$), то $b < a + c = 3b - 2a$, или $b > a$ – что выполнено. Если $c > b$ (т.е. $2b > 3a$), то $c < a + b$, или $2a > b$.

Пусть теперь $b > a \ge \frac{2}{3}b$. Тогда, взяв $c = 3b - 3a$, получаем: $b \ge c$, $b < a + c$ – значит, из отрезков a, b, c треугольник построить можно. Если же $\frac{2}{3}b > a > \frac{b}{2}$, то $b > a$, $c = 3b - 3a > b$, $c < a + b$.

Итак, при $b > a > \frac{b}{2}$ надо взять $c = 3b - 3a$.

б) Да. Попытаемся решить систему

$$\begin{cases} b = a + \frac{c}{3}, \\ b^2 = a^2 + c^2. \end{cases}$$

Получим $b = \frac{5}{4}a$, $c = \frac{3}{4}a$. Действительно, треугольник со сторонами 4, 5, 3 подходит. Возможен еще один такой треугольник, его стороны $\left(\sqrt{17}-1\right)/6$, $\left(\sqrt{17}+1\right)/6$, 1.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1622. *Пусть K – множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$): $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше – принадлежащих множеству K или остальных, если а) N = 1000; б) N – произвольное натуральное число?*

Докажем, что в любом отрезке $[1, k]$ K-чисел не меньше, чем остальных. Равенство достигается в точности тогда, когда $k = 2^n - 2$ ($n \ge 2$). Пусть утверждение верно для всех отрезков $[1, m]$, где $m \le 2^n - 2$. Тогда в любом отрезке $[2^n, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел не меньше, чем остальных. Значит, в любом отрезке $[1, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел больше. Так как на отрезке $[1, 2^n - 2]$ содержится $2^{n-1} - 1$ K-чисел, то на отрезке $[1, 2^{n+1} - 3]$ содержится $2\left(2^{n-1}-1\right) + 1 =$
$= 2^n - 1$ K-чисел. Но $2^{n+1} - 2$ не является K-числом. Следовательно, на отрезке $[1, 2^{n+1} - 2]$ содержится K-чисел столько же, сколько и остальных.

Б.Кукушкин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1623. *Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I – центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.*
а) Докажите, что OI = IH.
б) Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?*

Мы будем пользоваться следующими легко доказываемыми утверждениями.

Лемма 1. В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны треугольника BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот а) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Из леммы 1 следует, что $HA = 2R\cos\alpha = R$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение задачи.

б) Пусть ABC не является правильным; тогда $O \neq H$. Пусть A и B лежат по разные стороны прямой OH, $AHIO$ не является выпуклым четырехугольником. Тогда $AH = AO = R$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Другое решение можно получить, опираясь на следующие формулы:

$$IO^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$$

Из них следует, что равенство $IO = IH$ можно переписать так:

$$p = (R + r)\sqrt{3}.$$

Остается воспользоваться такой леммой.

Лемма 3. Алгебраическая сумма расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (при этом, если центр описанной окружности лежит по ту же сторону от некоторой стороны, что и сам треугольник, то расстояние до этой стороны считается положительным, а в противном случае – отрицательным).

А.Савин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1625.[1] *Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть S_1 – площадь черной части треугольника, а S_2 – площадь его белой части. Положим*

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

а) Вычислите f(m, n) для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.

б) Докажите, что $f(m, n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.

в) Покажите, что не существует константы C такой, что f(m, n) < C для всех m и n.

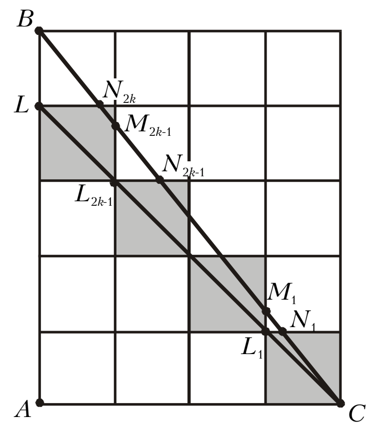
а) Обозначим рассматриваемый прямоугольный треугольник через ABC ($\angle A = 90°$, $AB = m$, $AC = n$) и достроим его до прямоугольника $ABCD$. Если числа m и n имеют одинаковую четность, то раскраска этого прямоугольника симметрична относительно середины его диагонали BC. Следовательно, $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ и $S_2(ABC) = S_2(BCD)$. Значит, $f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|$. Поэтому $f(m, n) = 0$, если m и n оба четны, $f(m, n) = \frac{1}{2}$, если m и n оба нечетны.

б) Если числа m и n имеют одинаковую четность, то требуемый результат немедленно вытекает из решения пункта а). Пусть теперь m нечетно, а n четно (в противном случае достаточно переобозначить m и n, и наоборот). Рассмотрим на отрезке AB точку L такую, что $AL = m - 1$. Так как число $m - 1$ четно, то $f(m - 1, n) = 0$, т.е. $S_1(ALC) = S_2(ALC)$. Следовательно,

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \le$$

$$\le \text{Площадь } LBC = \frac{n}{2} \le \frac{1}{2}\max\{m.n\}.$$

в) Вычислим $f(2k + 1, 2k)$. Как и в решении пункта б), рассмотрим на AB точку L такую, что $AL = 2k$, и получим аналогично, что



$$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

Площадь треугольника LBC равна k. Без ограничения общности будем считать, что отрезок LC черный (см. рисунок). Тогда белая часть треугольника LBC состоит из треугольников BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, …, $M_1L_1N_1$, каждый из которых, очевидно, подобен треугольнику ABC. Их суммарная площадь равна

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k}{2k+1} \cdot \left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2\right) = \frac{4k+1}{12}.$$

Значит,

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12} \text{ и } f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$

Ясно, что $\frac{2k-1}{6}$ принимает сколь угодно большие значения.

И.Воронович

М1626. *В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U – внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Срединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что*

$$AU = TB + TC.$$

Нетрудно доказать, что если $\angle A$ – наименьший из углов ΔABC, то точка T находится внутри этого треугольника. Пусть прямые BV и CW пересекают окружность, описанную около ΔABC, вторично в точках B_1 и C_1 соответственно (рис.1). В силу симметрии относи-

[1] *Решение задачи М1624 будет опубликовано позже.*

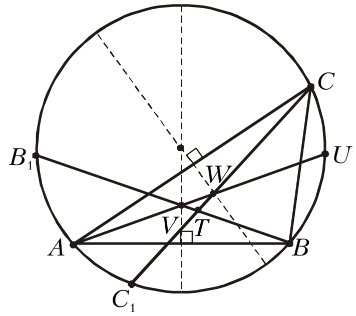


Рис.1

тельно серединного перпендикуляра к стороне AB имеем $AU = BB_1$. Аналогично, $AU = CC_1$. Следовательно, $BB_1 = CC_1$, а значит, и $TB = TC_1$ (BCB_1C_1 – равнобокая трапеция!). Тогда $TB + TC = TC_1 + TC = CC_1 = AU$, что и требовалось.

Замечание

1. Задача имеет много других решений. Участники олимпиады в основном использовали тригонометрию и аналитическую геометрию.
2. Если отказаться от требования минимальности угла A, то (при условии, что прямые BV и CW действительно пересекаются, а не параллельны) справедливо следующее утверждение: из отрезков AU, TB и TC один равен сумме двух других. Например, в ситуации, изображенной на рисунке 2, $TB = AU + TC$.

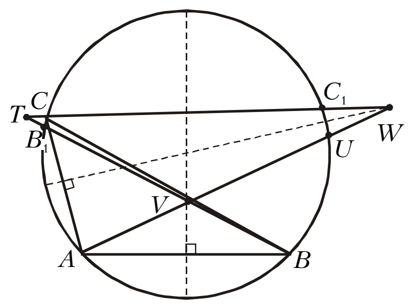


Рис.2

3. Если $\angle A = 30°$, а O – центр окружности, описанной около ΔABC, то $|BT - CT| = OT$ (докажите это самостоятельно).

Д.Терешин

М1627. *Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – действительные числа, удовлетворяющие условиям*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

и

$$|x_i| \le \frac{n+1}{2},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Докажите, что существует перестановка $y_1, y_2, \ldots, x_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ такая, что

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Допустим, что требуемой перестановки не существует, т.е. для любой перестановки выполнено неравенство $|s| = |y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| > \frac{n+1}{2}$. Изменив, если это необходимо, знаки чисел и их нумерацию, мы можем считать, что $x_1 + \ldots + x_n = 1$ и $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$. Рассмотрим перестановки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Пусть $S_1 = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n$, $S_2 = x_n + 2x_{n-1} + \ldots$ $\ldots + nx_1$. Легко понять, что $S_2 \ge S_1$. Действительно, если в наборе $y_1, \ldots, y_n$ поменять местами y_k и y_{k+1}, то при $y_{k+1} \ge y_k$ получим $S'_{k+1} - S'_k = (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_k + (k+1)y_{k+1} + \ldots + ny_n) - (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_{k+1} + (k+1)y_k + \ldots + ny_n) = y_{k+1} - y_k \ge 0$. Поэтому, если мы последовательно поменяем местами x_1 с x_2, x_1 с x_3, …, x_1 с x_n, затем x_2 с x_3, …, x_2 с x_n, …, x_{n-1} с x_n, то из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получим $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, причем на каждом шаге рассматриваемая нами сумма не уменьшалась.

Заметим теперь, что $S_1 + S_2 = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n) = n + 1$, поэтому $S_2 \ge \frac{n+1}{2} \ge S_1$. Но, согласно предположению, $|S_1| > \frac{n+1}{2}$ и $|S_2| > \frac{n+1}{2}$, следовательно, $S_2 > \frac{n+1}{2}$, а $S_1 < -\frac{n+1}{2}$.

С другой стороны, $|S'_{k+1} - S'_k| = |y_{k+1} - y_k| \le |y_{k+1}| + |y_k| \le n + 1$. Поэтому, если $S'_k > \frac{n+1}{2}$, то и $S'_{k+1} > \frac{n+1}{2}$ (иначе, если $S'_{k+1} < -\frac{n+1}{2}$, то $|S'_{k+1} - S'_k| > n + 1$). Но $S_2 > \frac{n+1}{2}$, значит, в результате наших перестановок мы получим $S_1 > \frac{n+1}{2}$, что противоречит полученному ранее неравенству $S_1 < -\frac{n+1}{2}$. Итак, наше предположение неверно, и искомая перестановка существует.

О.Богопольский

М1628. *Таблица $n \times n$, заполненная числами из множества $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, называется серебряной, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ объединение i-й строки и i-го столбца содержит все числа из S.*

Покажите, что:

а) не существует серебряной таблицы для $n = 1997$;

б) серебряные таблицы существуют для бесконечного числа значений n.

а) Пусть $n > 1$ – натуральное число. Предположим, что серебряная таблица $n \times n$ существует. Пусть k – элемент из множества $[1, 2, \ldots, 2n - 1\}$, который не стоит на главной диагонали таблицы (такой элемент найдется, так как $n < 2n - 1$). Назовем объединение i-го столбца и i-й строки таблицы i-м крестом. Число k появляется в каждом кресте ровно один раз. Если k стоит на пересечении i-го столбца и j-й строки, то оно входит и в i-й и в j-й крест. Будем говорить, что эти кресты k-связаны. Таким образом, все n крестов разбиваются на пары k-связных, т.е. n – четное число. Но 1997 – число нечетное.

б) При $n = 2$ таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ является серебряной. Из нее легко получить серебряную таблицу 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конструкция первой из этих таблиц несложным образом обобщается: если A – серебряная таблица $n\times n$, то построим таблицу D размерами $2n\times 2n$ так: $D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix}$, где таблица B получена из A добавлением $2n$ к каждому ее элементу, а C получена из B заменой всех ее элементов, стоящих на главной диагонали, на $2n$. Таблица D будет серебряной. Действительно, пусть $i \le n$ (другой случай разбирается аналогично). Рассмотрим i-й крест таблицы D. Он состоит из i-го креста A, i-й строки B и i-го столбца C; i-й крест A содержит числа 1, 2, …, $2n - 1$, а i-я строка B и i-й столбец C содержат числа $2n$, $2n + 1$, …, $4n - 1$.

Замечания

1. Серебряные таблицы существуют для всех четных n.
2. Приведем еще один способ построения серебряной таблицы $2^n \times 2^n$. Для целых неотрицательных чисел a и b обозначим через $a\oplus b$ число, полученное следующим образом: запишем a и b в двоичной системе счисления, добавив, если это необходимо, слева нули так, чтобы число разрядов совпадало; затем сложим числа «в столбик», но не учитывая переносов, т.е. поразрядно, а результат вновь запишем в десятичной системе. Например: $7\oplus 9 = 14$, так как $7 = 111_2$, $9 = 1001_2$,

$$\begin{array}{r} 0111_2 \\ \underline{1001_2} \\ 1110_2 \end{array}, \quad 1110_2 = 14.$$

Занумеруем числами от 0 до $2^n - 1$ строки и столбцы таблицы (сверху вниз и слева направо соответственно). Запишем в клетку, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца число

$$a_{ij} = \begin{cases} i\oplus j + 1 \text{ при } j \le i, \\ i\oplus j + 2^n \text{ при } j > i. \end{cases}$$

Полученная таблица будет серебряной.

М1629. *Найдите все пары (a, b) целых чисел $a \ge 1$, $b \ge 1$, удовлетворяющих уравнению*

$$a^{\left(b^2\right)} = b^a.$$

Из равенства $a^{b^2} = b^a$ следует, что $a = b^{a/b^2}$. Пусть $\frac{a}{b^2} = \frac{k}{l}$, где $(k, l) = 1$. Тогда $a = b^{k/l}$, $\left(b^{k/l}\right)^{b^2} = b^{\left(b^{k/l}\right)}$,

$$b^{kb^2/l} = b^{b^{k/l}}. \qquad (1)$$

Если $b = 1$, то и $a = 1$. Если же $b > 1$, то из (1) вытекает, что $\frac{k}{l}b^2 = b^{k/l}$, т.е.

$$\frac{k}{l} = b^{k/l-2}. \qquad (2)$$

1-й случай: $k - 2l \ge 0$. Тогда из (2) следует, что $\frac{k}{l}$ – целое, поэтому $l = 1$ (так как $(k, l) = 1$), т.е. $a = b^k$,

$$k = b^{k-2}. \qquad (3)$$

Из неравенства $b^{k-2} \ge 2^{k-2} > k$ при $k \ge 5$ получаем, что (3) возможно лишь при $k < 5$. Перебором убеждаемся, что $k = 4$, $b = 2$, $a = 16$ или $k = 3$, $b = 3$, $a = 27$.

2-й случай. $k - 2l < 0$. Из (2) получаем, что $\frac{l}{k} = b^{2-k/l}$, где $2 - \frac{k}{l} > 0$, т.е. $k = 1$. Тогда $b = a^l$, $a^{a^{2l}} = a^{al}$, $a^{2l-1} = l$, следовательно, $l \ge 2^{2l-1}$, что невозможно при $l \ge 2$.

Ответ: $\{(1, 1); (16, 2); (27, 3)\}$.

М1630. *Для любого натурального числа n обозначим через $f(n)$ число способов представления числа n в виде суммы целых неотрицательных степеней числа 2. Преставления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми. Например, $f(4) = 4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + + 1 + 1. Докажите, что для любого целого числа $n \ge 3$ $2^{n^2/4} < f\left(2^n\right) < 2^{n^2/2}$.*

Если $n = 2k + 1$ – любое нечетное число, большее 1, то каждое его представление в требуемом по условию задачи виде содержит 1 в качестве слагаемого. Убрав эту единицу, мы получим представление числа $2k$. Верно, очевидно, и обратное. Следовательно,

$$f(2k+1) = f(2k). \qquad (1)$$

Если $n = 2k$ – любое четное число, то каждое его представление в требуемом виде принадлежит к одному из двух типов: либо оно содержит слагаемое 1, либо не содержит таких слагаемых. В первом случае, убрав одно слагаемое 1, мы получим представление числа $2k - 1$. Как и выше, легко заметить, что есть взаимно однозначное соответствие между всеми представлениями числа $2k - 1$ и представлениями числа $2k$ первого типа. Во втором случае мы можем разделить все слагаемые на 2 и получить представление числа k. Это соответствие также взамно однозначно. Итак,

$$f(2k) = f(2k-1) + f(k). \qquad (2)$$

Обе полученные формулы выполнены для всех натуральных $k \ge 1$. Очевидно, что $f(1) = 1$. Пусть по определению $f(0) = 1$, тогда формула (1) выполнена и при $k = 0$. Заметим еще, что из (1) и (2) следует, что $f(n)$ не убывает.

Согласно (1), число $f(2k - 1)$ в (2) можно заменить на $f(2k - 2)$, откуда

$$f(2k) - f(2k - 2) = f(k) \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Суммируя эти равенства от 1 до n, получаем, что

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n),\ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3)$$

В правой части (3) каждое слагаемое не больше последнего, а так как $2 = f(2) \le f(n)$ для $n \ge 2$, то

$$f(2n) = 2 + \left(f(2) + \ldots + f(n)\right) \le 2 + (n-1)f(n) \le$$

$$\le f(n) + (n-1)f(n) = nf(n) \text{ для } n = 2, 3, 4, \ldots$$

Следовательно,

$$f\left(2^n\right) \le 2^{n-1}\cdot f\left(2^{n-1}\right) \le 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot f\left(2^{n-2}\right) \le \ldots$$

$$\ldots \le 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1}\cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot 2.$$

И так как $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ для $n \geq 3$, верхняя оценка для $f\left(2^n\right)$ получена.

Чтобы получить нижнюю оценку, докажем сначала, что

$$f(b+1) - f(b) \geq f(a+1) - f(a), \qquad (4)$$

если $b \geq a \geq 0$ – целые числа одинаковой четности. Действительно, если a и b четны, то из (1) следует, что каждая часть неравенства (4) обращается в нуль, а если они оба нечетны, то из (2) следует, что $f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right)$ и $f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right)$. Остается вспомнить, что f не убывает.

Возьмем произвольные натуральные $r \geq k$, r – четное, и подставим в равенство (4) $a = r - j$, $b = r + j$ для $j = 0, \ldots, k-1$. Сложив полученные неравенства, получаем

$$f(r+k) - f(r) \geq f(r+1) - f(r-k+1).$$

Так как r четно, то $f(r+1) = f(r)$, и следовательно,

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geq 2f(r) \text{ для } k = 1, \ldots, r.$$

Суммируя эти неравенства для $k = 1, \ldots, r$, мы получаем, что

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geq 2rf(r).$$

В силу равенства (3) левая часть равна $f(4r) - 1$. Поэтому

$$f(4r) \geq 2rf(r) + 1 > 2rf(r).$$

Возьмем $r = 2^{m-2}$. Тогда

$$f\left(2^m\right) > 2^{m-1} f\left(2^{m-2}\right). \qquad (5)$$

($r = 2^{m-2}$ четно при $m > 2$, $m \in \boldsymbol{N}$; заметим, однако, что (5) справедливо и при $m = 2$.)

Наконец, пусть $n > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Если l – положительное целое такое, что $2l \leq n$, то, применяя неравенство (5) к $m = n, n-1, \ldots, n-2l+2$, получим, что

$$f\left(2^n\right) > 2^{n-1} \cdot f\left(2^{n-2}\right) >$$

$$> 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f\left(2^{n-4}\right) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f\left(2^{n-6}\right) > \ldots$$

$$\ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right) = 2^{l(n-l)} \cdot f\left(2^{n-2l}\right).$$

Теперь, взяв $l = \frac{n}{2}$, если n четно, или $l = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно, получаем

$$f\left(2^n\right) > 2^{n^2/4} \cdot f\left(2^0\right) = 2^{n^2/4},\ n \text{ – четно};$$

$$f\left(2^n\right) > 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot f\left(2^1\right) = 2^{\left(n^2-1\right)/4} \cdot 2 > 2^{n^2/4},\ n \text{ – нечетно}.$$

Нужный результат доказан для $n \geq 2$. Непосредственно проверяется, что и для $n = 1$ соответствующее неравенство справедливо.

Публикацию решений задач М1628–М1630 подготовил Д.Терешин

Ф1638. *Маленький упругий шарик подпрыгивает, ударяясь о горизонтальную подставку, при этом высота подскоков равна H. Подставку очень медленно сдвигают параллельно самой себе на h вниз и останавливают. Найдите новую высоту, на которую шарик будет подпрыгивать относительно подставки после ее остановки.*

Если подставка движется с постоянной скоростью, то высота подскока с течением времени не меняется. Для того чтобы это понять, достаточно перейти в систему отсчета, которая движется вместе с подставкой. При очень малой скорости движения подставки (как в условии задачи) высота подскока останется равной H.

Тут возникает вопрос: если шарик движется с подставкой вниз и при этом теряет потенциальную энергию, почему же не возрастает его кинетическая энергия (высота подскока связана именно с ней)? Оценим потери энергии шарика при ударе о подставку, которая движется вниз со скоростью u (если бы подставка двигалась вверх, то энергия шарика при ударах возрастала бы). Если скорость шарика перед ударом была v, то после удара о тяжелую подставку его скорость будет направлена вверх и равна $v - u$ относительно подставки и $v - 2u$ относительно неподвижной системы координат. Тогда потеря кинетической энергии шарика при ударе составит $mv^2/2 - m(v-2u)^2/2 = 2mvu - 2mu^2 \approx 2mvu$. За время $\tau \approx 2v/g$ до следующего удара подставка сдвинется вниз на $\Delta h = \tau u = 2vu/g$, и шарик «потеряет» потенциальную энергию $mg\Delta h = 2mvu$. Видно, что «добавка» за счет уменьшения потенциальной энергии равна потере кинетической энергии – но «потерянную» энергию шарик как раз и передает подставке.

А.Зильберман

Ф1639. *Горизонтально расположенный цилиндрический сосуд с массивным поршнем находится в вакууме (рис.1). Пружина жесткостью k, закрепленная с одной стороны, упирается в поршень. В начальном положении газа под поршнем нет, пружина не деформирована. Через дырку в дне сосуда в него впускают некоторое количество гелия и закрывают дырку. После установления равновесия пружина оказалась деформированной на L. Затем газ очень медленно нагревают, пока поршень не сдвигается еще на L. Какое количество теплоты получил газ при этом? Теплоемкостью стенок и поршня пренебречь.*

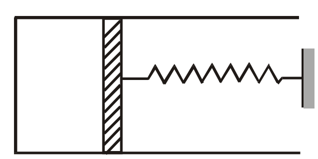


Рис.1

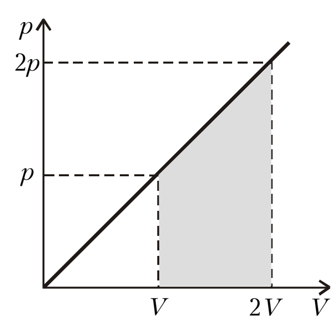


Рис.2

Работа газа при нагреве – это работа по деформации пружины от L до $2L$ (рис.2):

$$A = \frac{k(2L)^2}{2} - \frac{kL^2}{2} = \frac{3kL^2}{2} = \frac{3pV}{2}.$$

(Мы учли, что в самом начале поршень находился у дна сосуда.) Приращение внутренней энергии газа составляет

$$\Delta U = \nu C_V (T_2 - T_1) = \frac{C_V}{R} \nu R (T_2 - T_1) =$$

$$= \frac{C_V}{R} (p_2 V_2 - p_1 V_1) = \frac{3}{2} \cdot 3pV = 3A$$

(молярная теплоемкость при постоянном объеме C_V для одноатомного газа равна $3R/2$). Следовательно, газ получил количество теплоты

$$Q = A + \Delta U = 4A = 6kL^2 .$$

М.Учителев

Ф1640. *Четыре одинаковые тонкие проводящие пластинки площадью S каждая расположены параллельно и очень близко друг к другу; расстояние между соседними пластинками равно d (рис.1). Первую и третью пластинки соединили проводником, между второй и четвертой включили батарейку напряжением U. Какие силы действуют на каждую из пластинок?*

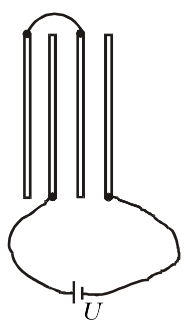


Рис.1

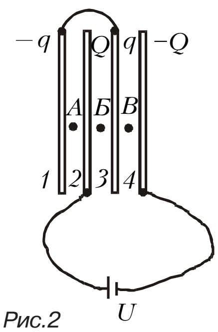


Рис.2

Введем обозначения Q и q для модулей зарядов пластин (рис.2). Выразим через эти величины напряженности поля в точках $А$, $Б$ и $В$:

$$E_А = -\frac{q}{\varepsilon_0 S},\ E_Б = \frac{Q-q}{\varepsilon_0 S},\ E_В = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}.$$

Ясно, что $E_А = -E_Б$ (иначе не будут равны потенциалы замкнутых между собой пластин *1* и *3*), тогда

$$-q = -(Q-q),\ \text{или}\ Q = 2q .$$

Разность потенциалов между пластинами *2* и *4*, соединенными батарейкой, равна

$$E_Б d + E_В d = \frac{(Q-q)d}{\varepsilon_0 S} + \frac{Qd}{\varepsilon_0 S} = U ,$$

откуда находим

$$q = \frac{U\varepsilon_0 S}{3d},\ Q = \frac{2U\varepsilon_0 S}{3d}.$$

На пластину *1* действует сила только со стороны пластины *3* (силы со стороны пластин *2* и *4* компенсируются):

$$F_1 = q \cdot \frac{1}{2} E_А = \frac{q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{U^2 \varepsilon_0 S}{18 d^2} .$$

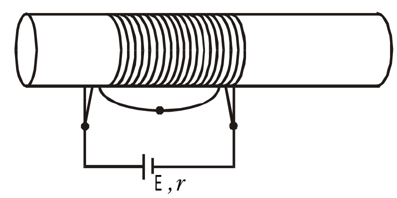
Для остальных пластин получаем

$$F_2 = Q\left(\frac{q}{\varepsilon_0 S} - \frac{Q}{2\varepsilon_0 S}\right) = 0 ,\ F_3 = q\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S} - \frac{q}{2\varepsilon_0 S}\right) = \frac{U^2 \varepsilon_0 S}{6d^2} ,$$

$$F_4 = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = \frac{2U^2 \varepsilon_0 S}{9d^2} .$$

А.Повторов

Ф1641. *Три длинных куска провода сложили вместе и получившимся «тройным» проводом намотали на цилиндрический немагнитный сердечник катушку, состоящую из большого количества витков (см. рисунок). Две из получившихся трех катушек соединили последовательно и к концам образовавшейся двойной катушки параллельно подключили выводы третьей катушки. Систему охладили до температуры, при которой катушки стали сверхпроводящими, и к выводам системы подключили батарейку с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Какие токи будут течь через катушки после того, как эти токи практически перестанут изменяться?*



ЭДС катушек в любой момент равны между собой (соединены параллельно), но ЭДС двойной катушки в 2 раза больше (сумма двух ЭДС), что возможно в единственном случае: $\mathcal{E}_i = 0$. Это означает, что поля, создаваемые катушками, друг друга компенсируют (т.е. $B_{общ} = 0$). Следовательно, токи направлены в противоположные стороны, ток двойной катушки в 2 раза меньше, чем ток одинарной. Сумма токов равна $\mathcal{E}/r$, так как $\mathcal{E}_i = 0$. Тогда через катушки текут токи $2\mathcal{E}/r$ и $-\mathcal{E}/r$ соответственно.

З.Рафаилов

Ф1642. *В сеть переменного напряжения (220 В, 50 Гц) включили последовательно конденсатор некоторой емкости и катушку индуктивностью 1 Гн. Параллельно конденсатору подключили вольтметр с очень большим сопротивлением. При какой емкости конденсатора вольтметр покажет напряжение 220 В? Какую емкость конденсатора ни в коем случае использовать нельзя?*

При одинаковых токах катушки и конденсатора их напряжения *противофазны*; значит, *разность* напряжений равна напряжению сети. Это возможно либо при $U_C = 0$ (бесконечно большая емкость), либо при $U_C = 440$ В. В последнем случае емкостное сопротивление конденсатора в 2 раза больше индуктивного сопротивления катушки:

$$\frac{1}{\omega C} = 2\omega L ,\ \text{откуда}\quad C = \frac{1}{2\omega^2 L} = \frac{1}{8\pi^2 f^2 L} \approx 5\ \text{мкФ}.$$

Нельзя подключать конденсатор, емкостное сопротивление которого равно индуктивному сопротивлению катушки, т.е. $C_{запрещ} \approx 10$ мкФ (ток потечет очень большой – резонанс все-таки!).

Р.Александров