LXI Московская математическая олимпиада

Избранные задачи окружного тура

1. Тренер опросил всех шахматистов, сколько сегодня партий сыграл каждый из них. Шестеро ответили, что сыграли по две партии, трое – что сыграли по три партии. Могло ли такое быть? Если да, то сколько всего партий было сыграно? Если нет, то почему? (6)[1]

А.Котляров

2. Придумайте раскраску клеток доски 6×6 в четыре цвета так, чтобы любые две клетки, между которыми ровно одна клетка (по горизонтали, вертикали или диагонали), были покрашены в разные цвета. Соседние клетки можно красить в один цвет. (6)

3. Квадрат разрезан на четыре прямоугольника и квадрат (рис.1). Прямоугольники, содержащие вершины A и C, имеют соответственно размеры 1×4 и 2×5. Найдите сторону внутреннего квадрата. (7)

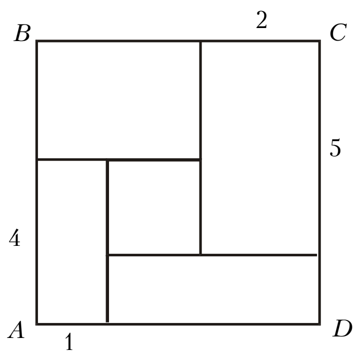

Рис. 1

4. Пройдя $3/8$ длины моста, ослик Иа-Иа заметил сзади на дороге автомобиль, идущий со скоростью 60 км/ч. Если ослик побежит назад, то встретится с автомобилем в начале моста, а если вперед, то автомобиль нагонит его в конце моста. С какой скоростью бегает Иа-Иа? (7)

5. На клумбе, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 2 м, растут 5 гвоздик. Докажите, что в любом случае какие-то две гвоздики растут на расстоянии не больше 1 м. (7)

6. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точка M – середина AC. Докажите, что $MD = ME$. (8)

7. Известно, что $a^2 + b^2 = 6ab$ и $a > b > 0$. Найдите $(a+b)/(a-b)$. (8)

8. С таблицей чисел разрешается проделывать две операции: менять местами любые две строки и менять местами любые два столбца. Докажите, что такими операциями нельзя получить из левой таблицы правую (рис.2). (8)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1	2	3
6	5	4
7	8	9

Рис. 2

9. По кругу написаны числа 1, 2, …, n, где n – нечетное число. На каждом числе сидит один кузнечик. Кузнечики одновременно прыгают по часовой стрелке так, что величина очередного прыжка равна числу, на котором сидел кузнечик (он прыгает с 1 на 2, с 2 на 4, с 3 на 6 и т.д.). Докажите, что на каждом числе снова окажется один кузнечик. Рассмотрите случаи а) $n = 7$, б) $n = 2k + 1$. (8)

А.Ковальджи

10. Найдите x_{9999}, если $x_0 = 100$, $x_1 = \sqrt{x_0^2 - 1}$, …, $x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 - 1}$. (9)

А.Канель-Белов

11. В правильном треугольнике ABC на стороне AB взяли точку E и на отрезке EC построили в сторону точки B правильный треугольник EKC. Докажите, что прямые AC и BK параллельны. (9)

12. Окружность разбита на 200 дуг, содержащих целое число градусов. Докажите, что несколько дуг подряд составляют дугу 180°. (9)

В.Произволов

13. Хоккейный матч «Льдинка» – «Снежинка» окончился со счетом 9:5. Докажите, что в матче был такой момент, когда «Льдинке» оставалось забить столько шайб, сколько «Снежинка» уже забила. (9)

14. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка D, а на стороне BC – точка E. Прямые AE и CD пересекаются в точке O. Докажите, что площадь треугольника DOE меньше площади AOC. (10)

А.Ковальджи

15. В чашку налили 20 ложек кофе. Саша выпивает из чашки одну ложку кофе и добавляет одну ложку молока. Перемешивает. Затем выпивает одну ложку смеси и опять доливает ложку молока. Проделав такую операцию несколько раз, может ли Саша получить смесь, состоящую наполовину из кофе и наполовину из молока? (10)

16. Придумайте квадратный трехчлен $x^2 - 2px + q$ такой, что при добавлении маленького числа $e = 10^{-10}$ к параметру p больший корень увеличится на большое число $E = 10^{10}$ (больший корень $x^2 - 2(p + e)x + q$ больше большего корня $x^2 - 2px + q$ на E; если корни равны, то считается, что больший корень равен меньшему). (10)

17. Некоторый многогранник склеен из черных пятиугольников и белых шестиугольников. Каждый пятиугольник граничит только с шестиугольниками, а каждый шестиугольник – с тремя пятиугольниками и тремя шестиугольниками. Каких ребер у многогранника больше: разделяющих белые грани или разделяющих белые и черные грани? (10)

А.Ковальджи

18. Докажите, что

$$\int_0^1 \sin(\sin x)\,dx < 1. \qquad (11)$$

А.Блинков

[1] *В скобках указан класс, в котором предлагалась задача.*

19. Барон Мюнхгаузен склеил из бумаги выпуклый многогранник, разрезал его на грани и послал их Леонарду Эйлеру. По дороге одна грань потерялась. Может ли так случиться, что Эйлер склеит из оставшихся граней выпуклый многогранник? (11)

С.Волченков

20. Даны положительные числа a, b, c. Найдите все x, для которых

$$c\cdot\sqrt{x-a^2-b^2}+b\cdot\sqrt{x-a^2-c^2}+$$
$$+a\cdot\sqrt{x-b^2-c^2}=a^2+b^2+c^2.\ (11)$$

Городская олимпиада

6 класс

1. На глобусе проведены 17 параллелей и 24 меридиана. На сколько частей разделена поверхность глобуса? Меридиан – это дуга, соединяющая Северный полюс с Южным. Параллель – это окружность, параллельная экватору (экватор тоже является параллелью).

М.Семенова

2. Три ежика делили три кусочка сыра массами 5 г, 8 г и 11 г. Лиса стала им помогать. Ей разрешили от любых двух кусочков отрезáть по 1 г сыра (обрезки лиса съедает). Сможет ли лиса оставить ежикам равные кусочки сыра?

А.Ковальджи

3. Расположите в вершинах правильного десятиугольника числа от 1 до 10 так, чтобы для любых двух соседних чисел их сумма была равна сумме двух чисел, им противоположных (симметричных относительно центра окружности).

4. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 3, на две части, из которых можно сложить треугольник.

5. На кольцевой дороге расположены четыре бензоколонки: A, B, C и D. Расстояние между A и B – 50 км, между A и C – 40 км, между C и D – 25 км, между D и A – 35 км (все расстояния измеряются вдоль кольцевой дороги в кратчайшую сторону). а) Приведите пример расположения бензоколонок (с указанием расстояний между ними), удовлетворяющий условию задачи. б) Найдите расстояние между B и C (укажите все возможности).

И.Ященко

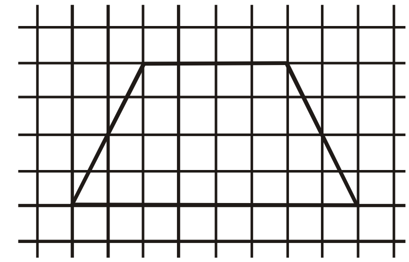

Рис. 3

6. Могут ли две неравные обыкновенные дроби, знаменатели которых 7 и 17, отличаться меньше, чем на а) 0,01; б) 0,005?

7. Расставьте на шахматной доске 32 коня так, чтобы каждый из них бил ровно 2 других.

М.Евдокимов

7 класс

1. См. задачу 1 для 6 класса.

2. В банановой республике прошли выборы в парламент. Все голосовавшие за партию «Мандарин» любят мандарины. Среди голосовавших за другие партии 90% не любят мандарины. Сколько процентов голосов набрала партия «Мандарин» на выборах, если ровно 46% участвовавших в голосовании любят мандарины?

Р.Федоров

3. См. задачу 5 для 6 класса.

4. На острове Контрастов живут рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Некоторые жители заявили, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Может ли число жителей острова быть нечетным?

В.Произволов

5. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фартингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу на одну монету больше. Какую наименьшую цену могла иметь покупка?

А.Шаповалов

6. Из квадрата 5×5 вырезали центральную клетку. Разрежьте получившуюся фигуру на две части, в которые можно завернуть куб $2\times2\times2$.

С.Токарев

8 класс

1. Найдутся ли натуральные числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению $28x+30y+31z=365$?

В.Произволов

2. Можно ли найти восемь натуральных чисел, таких что ни одно из них не делится ни на какое другое, но квадрат любого из этих чисел делится на каждое из остальных?

А.Канель-Белов

3. Диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Точка M лежит на прямой AB, причем $\angle AMO=\angle MAD$. Докажите, что точка M равноудалена от точек C и D.

М.Смуров

4. Некоторые из чисел a_1, a_2, … …, a_{200} написаны синим карандашом, а остальные – красным. Если стереть все красные числа, то останутся все натуральные числа от 1 до 100, записанные в порядке возрастания. Если же стереть все синие числа, то останутся все натуральные числа от 100 до 1, записанные в порядке убывания. Докажите, что среди чисел a_1, $a_2,\ldots,a_{100}$ содержатся все натуральные числа от 1 до 100 включительно.

В.Произволов

5. За круглым столом сидят несколько гостей. Некоторые из них знакомы между собой; знакомство взаимно. Все знакомые любого гостя (считая его самого) сидят вокруг стола через равные промежутки. (Для другого человека эти промежутки могут быть другими.) Известно, что любые двое имеют хотя бы одного общего знакомого. Докажите, что все гости знакомы друг с другом.

Б.Френкин

6. См. задачу М1638 «Задачника «Кванта».

9 класс

1. Является ли число $4^9+6^{10}+3^{20}$ простым?

А.Ковальджи

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и CE. Построили квадрат $ACPQ$ и прямоугольники $CDMN$ и $AEKL$, у которых $AL=AB$, $CN=CB$. Докажите, что площадь квадрата $ACPQ$ равна сумме площадей прямоугольников $AEKL$ и $CDMN$.

А.Ковальджи

3. См. задачу М1639 «Задачника «Кванта».

4. В стране Нашии есть военные базы, соединенные дорогами. Набор дорог называется *важным*, если после закрытия этих дорог найдутся две базы, не соединенные путем. Важный набор называется *стратегическим,* если он не содержит меньшего важного набора. Докажите, что множество дорог, принадлежащих ровно одному из двух различных стратегических наборов, образует важный набор.

А.Скопенков

5. Точка O лежит внутри ромба $ABCD$. Угол DAB равен 110°. Углы AOD и BOC равны 80° и 100° соответственно. Чему может быть равен угол AOB?

М.Волчкевич

6. На отрезке [0; 1] отмечены несколько различных точек. При этом каждая отмеченная точка расположена либо ровно посередине между двумя другими отмеченными точками (не обязательно соседними с ней), либо ровно посередине между отмеченной точкой и концом отрезка. Докажите, что все отмеченные точки рациональны.

В.Произволов

10 класс

1. Пусть a, b, c – целые неотрицательные числа такие, что $28a + 30b + 31c = 365$. Докажите, что $a + b + c = 12$.

В.Произволов, С.Анисов

2. См. задачу М1637 «Задачника «Кванта».

3. Дорога протяженностью 1 км полностью освещена фонарями, причем каждый фонарь освещает отрезок дороги длиной 1 м. Какое наибольшее количество фонарей может быть на дороге, если известно, что после выключения любого фонаря дорога будет освещена уже не полностью?

С.Агеев

4. Существует ли натуральное число, делящееся на 1998, сумма цифр которого меньше 27?

А.Канель-Белов, С.Анисов

5. На пол положили правильный треугольник ABC, выпиленный из фанеры. В пол вбили три гвоздя (по одному вплотную к каждой стороне треугольника) так, что треугольник невозможно повернуть, не отрывая от пола. Первый гвоздь делит сторону AB в отношении 1:3, считая от вершины A, второй делит сторону BC в отношении 2:1, считая от вершины B. В каком отношении делит сторону AC третий гвоздь?

А.Шень

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству

$$x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = 1/2.$$

Докажите, что хотя бы одно из них равно $1/2$.

В.Произволов

2. Про непрерывную функцию f известно, что:

а) f определена на всей числовой прямой;

б) f в каждой точке имеет производную (и, таким образом, график f в каждой точке имеет единственную касательную);

в) график функции f не содержит точек, у которых одна из координат рациональна, а другая – иррациональна.

Следует ли отсюда, что график f – прямая?

С.Вольфрам

3. В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AK и BL. Углы $\angle BAK$ и $\angle CBL$ равны 30°. Найдите углы треугольника ABC.

Г.Гальперин

4. Решите в натуральных числах уравнение $3^x + 4^y = 5^z$.

А.Эвнин, В.Сендеров

5. Можно ли в пространстве составить замкнутую цепочку из 61 одинаковых согласованно вращающихся шестеренок так, чтобы углы между сцепленными шестеренками были не меньше 150°? При этом:

а) для простоты шестеренки считаются кругами;

б) шестеренки сцеплены, если соответствующие окружности в точке соприкосновения имеют общую касательную;

в) угол между сцепленными шестеренками – это угол между радиусами их окружностей, проведенными в точку касания;

г) первая шестеренка должна быть сцеплена со второй, вторая – с третьей, ..., 61-я – с первой, а другие пары шестеренок не должны иметь общих точек.

С.Анисов

6. См. задачу М1645 «Задачника «Кванта».

Избранные задачи отбора на Российскую олимпиаду

1. Для каких натуральных n существует такой многочлен с вещественными коэффициентами $P(x)$, что $P(P(x)) = x^n - 1$? (9)

М.Евдокимов

2. Существует ли такое целое число a, что уравнение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$ имеет 99 решений в целых числах? (9)

В.Сендеров

3. Несколько школьников играют в пинг-понг «на вылет». Они образовали очередь, первый играет со вторым, победитель этой пары – с третьим и т.д. вплоть до последнего. На следующий день они снова играют по такой системе, но порядок в очереди заменили на противоположный: последний стал первым, предпоследний – вторым и т.д., первый стал последним. Докажите, что найдется пара, которая играла между собой и в первый день, и во второй. (10)

Б.Френкин

4. Можно ли подобрать рациональные числа a, b, c так, чтобы выполнялось равенство

$$a\cos 20° + b\cos 40° + c\cos 80° = 1?\ (11)$$

В.Сендеров

5. Найдите все непрерывные функции $f(x)$, обладающие свойствами:

а) $f(x)$ определена на всей числовой прямой;

б) для всех x имеет место равенство

$$f(x) = x + f(x - f(x));$$

в) $f(0) = 0$. (11)

И.Дынников

6. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Прямые AB и CD пересекаются в точке P, а прямые AD и BC – в точке Q, причем отрезки BP и DQ пересекаются в точке A; M – основание перпендикуляра, опущенного из точки O на PQ. Докажите, что

а) точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$ лежит на прямой OM;

б) углы $\angle BMO$ и $\angle DMO$ равны. (11)

Фольклор

Публикацию подготовили С.Анисов, А.Ковальджи, В.Сендеров, Г.Челноков